



# Begrepslæring og begrepsforståelse i matematikk

---

MARS 2019



Susanne Stengrundet, Ingunn Valbekmo,  
NTNU

## Innholdsfortegnelse

BEGREPER, MATEMATIKKENS BYGGESTEINER .....	3
ULIKE TYPER BEGREPER .....	4
BEGREPSSTRUKTURER .....	4
LÆRING AV BEGREPER.....	5
RELASJON MELLOM BEGREP OG REPRESENTASJON. ....	6
OPPSUMMERING .....	9
LITTERATURLISTE.....	10

## Begreper, matematikkens byggesteiner

Begreper er viktige byggesteiner i matematikken. *Begrep* er ikke synonymt med *ord*, man bruker ord for å formidle begrepene. Begrepet er det abstrakte innholdet til ordet. Et matematisk begrep kan være et objekt som for eksempel et *rektangel*, en prosess, for eksempel *multiplikasjon* eller en egenskap som for eksempel *volum* (Roos og Trygg, 2018). Et mål for matematikkundervisningen er at elevene skal få en god begrepsforståelse. Det innebærer at elevene ikke bare kjenner til ordene, men også vet hvorfor de kan bruke akkurat dette begrepet i en bestemt situasjon. Elevene bør kunne beskrive begreper med egne ord, ved å lage tegninger og ved å bruke matematiske symboler. Det vil si at de må kjenne til ulike måter å representere et begrep på. Vi kan gjøre elevene kjent med begrepet prosent og lære dem noen formler for prosentregning. Det vil gjøre elevene i stand til å løse mange oppgaver riktig, men ikke nødvendigvis gi en god begrepsforståelse. Så snart en oppgave er litt mer innviklet eller har en annen struktur, ramler hele begrepsapparatet sammen. «Må jeg gange eller dele, lærer?» er et velkjent spørsmål fra elever som kan en prosedyre, men ikke vet når den skal brukes. Det er utfordrende å legge opp undervisningen slik at den fremmer begrepslæring. Denne artikkelen belyser elementer ved matematiske begreper som det er viktig at læreren tar stilling til før undervisningen starter.

Begrepslæringen starter tidlig. Allerede i barnehagen kan barn lære begrepet *rektangel* om en firkant med to og to parallelle sider. Senere lærer barnet/eleven at rektangelet har egenskaper som fire rette vinkler eller at figuren har to diagonaler som er like lange. Arealberegninger utvider begrepsforståelsen ytterligere. Disse beregningene kan videre brukes til å finne en funksjon som viser hvordan areal og omkrets henger sammen. Det betyr at barn bruker begrepene før de er modne nok til å forstå helheten. Den forenklete framstillingen barna lærer tidlig må likevel være korrekt for at elevene skal kunne bygge på og utvide et ufullstendig begrep. Hvis et barnehagebarn mener at bare kvadrater er firkanter og kaller smale rektangler for strek, kan begrepsbruken bli et hinder for senere læring. Barnet bør lære at firkanter betegner alle figurer med fire hjørner, mens kvadratet er en regulær firkant. En slik begrepsforståelse vil kunne utvides etter hvert som barnet utvikler seg.

## Ulike typer begreper

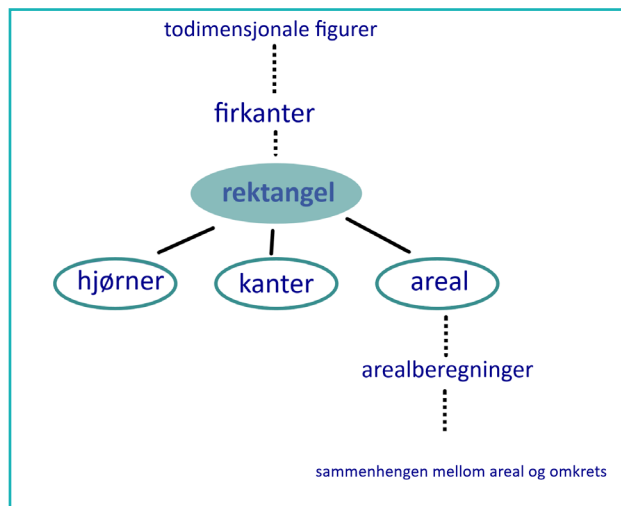
Et begrep er ikke en isolert kunnskapsbit, men henger sammen med andre begreper. Gjennom skoleårene vil elevene arbeide med mange begreper. Noen begreper har de møtt før, mens andre er helt nye. Antall begreper vil etter hvert bli svært omfattende. Hvis elevene ikke lærer å se sammenhenger mellom de ulike begrepene, blir omfanget så stort at elevene vil miste oversikten. Å ordne begreper i et hierarki er en forutsetning for dybdelæring. En god begrepsstruktur avlaster i tillegg korttidshukommelsen. Ikke alle begreper som elevene møter i undervisningen er like sentrale for videre læring. Noen begreper er så viktige at elevene må jobbe med dem gjennom mange år for å etablere en solid begrepsforståelse. Slike begreper kaller man overordnede begreper. Begreper som elevene arbeider med tidlig i skoleløpet vil senere kunne brukes som redskap i læring av andre begreper. Hvis man bruker god tid på å etablere for eksempel et solid brøkbegrep, vil ikke regning med brøk oppleves krevende. De ulike reglene for regning vil ikke oppleves som løsrevne kunnskapsbiter. Når tallene senere blir erstattet med bokstaver vil også dette passe inn i begrepsstrukturen og samtidig utvide den.

## Begrepsstrukturer

De overordnede begrepene som man arbeider med over lang tid, kan bestå av underbegreper. Flere slike underbegreper kan ligge på samme nivå, da betegnes de ofte som sidebegreper. Første skritt til læring av et begrep, enten det er et overordnet begrep eller et sidebegrep, er at læreren analyserer begrepet matematisk, før begrepet introduseres for elevene: Hvilken type begrep dreier det seg om, hvordan kan man definere begrepet, hvilke egenskaper er viktigst? Hvilke typer modeller og representasjoner kan man bruke for å vise begrepet? Hvilken relasjon har begrepet til andre begrep? Her kan det både være snakk om begreper som elevene kjenner til og begreper de skal lære senere. Hvilken betydning har begrepet i den matematiske konteksten? Kan man si noe om opprinnelsen til begrepet? Å besvare slike spørsmål vil gjøre læreren i stand til å velge metoder og arbeidsformer som vil kunne legge til rette for god begrepsutvikling hos elevene.

Det kan også være lurt å lage et hierarki av begrepene. Man tar utgangspunkt i begrepet som er sentralt for undervisningssekvensen, dette kan være en time, en uke eller en lengre tidsperiode. Hvilke begreper er overordnet og hvilke underbegreper trenger elevene for å forstå det begrepet som de skal arbeide med? At læreren har et klart overblikk over hvor begrepet kan plasseres i hierarkiet vil kunne være med på å strukturere undervisningen, slik at de viktige relasjonene blir tydelig for elevene. Figur 1 viser et mulig hierarki for begrepet

rektangel. Dersom elevene i 1. eller 2. klasse skal arbeide med dette begrepet må de kjenne til begrepene kant, hjørne og firkant. For elever på 4.-5. trinn vil fokuset kanskje være på areal av rektangel, og da er ikke kant og hjørne like viktige. Disse begrepene vil likevel være begreper elevene kjenner fra tidligere undervisning og de vil kunne bruke denne kunnskapen i arbeid med arealberegninger av rektangler.



FIGUR 1

Å lære et begrep betyr dermed at ulike erfaringer bindes sammen og at man forstår stadig flere av egenskapene til begrepene. God begrepslæring legger til rette for dybdelæring. Det er først når fakta forbindes med noe som er lært fra før at hjernen kan utnytte sin kapasitet.

## Læring av begreper

Når kan vi si at et begrep er forstått? Å ha god forståelse for et begrep innebærer som nevnt å ha oversikt over sentrale egenskaper ved begrepet. En må også kunne representere begrepet på ulike måter, både ved hjelp av tegninger, modeller, symboler og verbalspråk. Videre innebærer god begrepsforståelse at en har innsikt i hvordan begrepet er relatert til andre begrep, og en må kjenne til eksempler og moteksempler for å kunne forklare og begrunne hvorfor en løsningsstrategi vil fungere eller hvorfor noe er sant eller usant. Elever med god begrepsforståelse vil kunne bruke begrepet i kjente og ukjente situasjoner og de vil kunne vurdere sitt arbeid og sine løsninger underveis.

Det er ulike veier fram mot en god begrepsforståelse. Noen lærer ved å samle kunnskapsbiter, og sette dem sammen som et puslespill. Først når puslespillet er ferdig, kommer helheten fram. Kunnskapsbitene i denne sammenhengen kan for eksempel være at

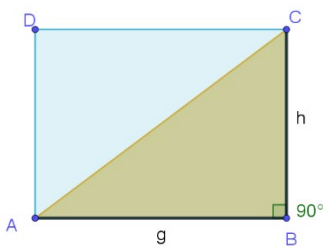
man bruker forskjellige representasjoner for å utforske et begrep. Først når man har nærmet seg begrepet på mange ulike måter og ser sammenhengen mellom de ulike representasjonene, vil man si at begrepet har blitt etablert. En annen måte å lære på er å bygge kunnskapsbiter på hverandre, som en trapp. Elever som bygger kunnskap på denne måten ser seg alltid tilbake og knytter det nye de lærer til det de har lært fra før. Felles for de ulike måtene å tilegne seg begreper på er at man kan si at et begrep er etablert når begrepsforståelsen kan utvides og generaliseres. Hvis man kan bruke kunnskap om volum av et prisme når man skal finne volum av en sylinder og ikke trenger lære en ny formel har man god forståelse for begrepet volum. Volumet beregnes på samme måte, *grunnareal · høyde*. Å kunne reflektere over det øker kvaliteten i begrepsforståelsen.

### Hva betyr det å forstå et begrep?

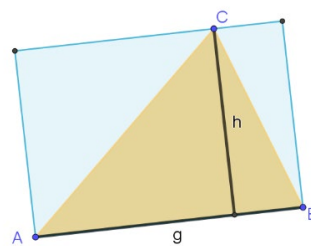
- Kjenne navnet og definisjoner
- Finne eksempler og moteksempler
- Kjenne til karakteristiske egenskaper
- Kjenne til begrepsstrukturen
- Kjenne til ulike måter å representere begrepet på

## Relasjon mellom begrep og representasjon.

For å utvikle god begrepsforståelse er det viktig at de representasjonene læreren bruker i undervisningen gir muligheter for utvidelse av forståelsen og at de ulike representasjonene representerer det samme. Vi skal se på to ulike eksempler knyttet til beregning av areal til trekanter. Når elevene begynner å arbeide med beregning av areal til trekanter møter de ofte en tegning som i figur 2.



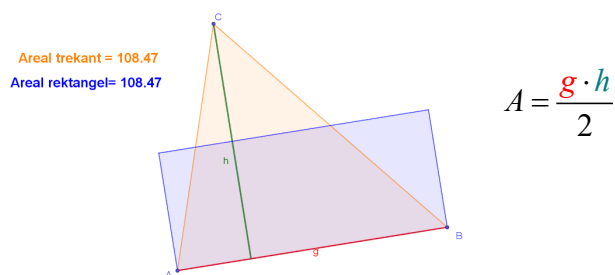
FIGUR 2



FIGUR 3

Figuren skal på en lettfattelig måte illustrere at arealet av en trekant er halvparten av arealet til et omskrevet rektangel. Ulempen med denne framstillingen er at figuren er en rettvinklet trekant. Ingen andre typer trekkanter kan omskrives med et rektangel på en slik enkel måte. Ingen av sidene til andre trekkanter vil være diagonalen til rektangelet på samme måte. At sidene i trekanten er parallelle med sidekanten i læreboken gjør det enda vanskeligere å overføre kunnskapen til trekkanter slik som figur 3. En forklaring med hjelp av en rettvinklet trekant vil ikke gi elevene en dypere forståelse for hvorfor arealet av trekkanter *alltid* kan beregnes som halvparten av et omskrevet rektangel, det vil være vanskelig å utvide kunnskap og forståelse.

På ungdomstrinnet møter elever andre illustrasjoner som forklarer formelen for areal til en trekant. Figur 4 viser et eksempel for en slik forklaring. Stemmer bildet og formelen overens? Er illustrasjonen en god forklaring for arealformelen til en trekant?



FIGUR 4

Det er viktig at elevene blir eksponert for varierte representasjoner for å oppnå dybdelæring. For å utvikle god begrepsforståelse må representasjonene stemme overens. I denne figuren sier den visuelle representasjonen noe annet enn den symbolske. Tegningen viser ikke at rektangelet med sidene  $g$  og  $h$  blir delt i to, men at høyden deles i to, altså at grunnlinjen blir multiplisert med halve høyden. Det kan kanskje oppfattes som overdreven nøyaktighet å poengtere dette, men det kan være slike uklarheter som fører til misoppfatninger og overflatelæring.

Som nevnt tidligere vil det å lære et begrep bety at man binder ulike erfaringer sammen og forstår stadig flere av egenskapene til begrepene. I eksemplet over så vi på begrepet areal og vi så på beregning av areal til trekkanter. Det vil være viktig at elevene får ulike erfaringer for å utvikle god forståelse for denne delen av arealbegrepet. Ulike erfaringer kan handle om å brette eller klippe trekkanter og sette dem sammen til rektangler eller kanskje også parallellogram. Det vil være hensiktsmessig å tegne og forklare før en begynner med selve

beregningen. Mot slutten av barnetrinnet eller på ungdomstrinnet vil elever kunne bearbeide formelen for areal til trekanter algebraisk, figur 5, og de vil kunne arbeide som vist i figur 6.

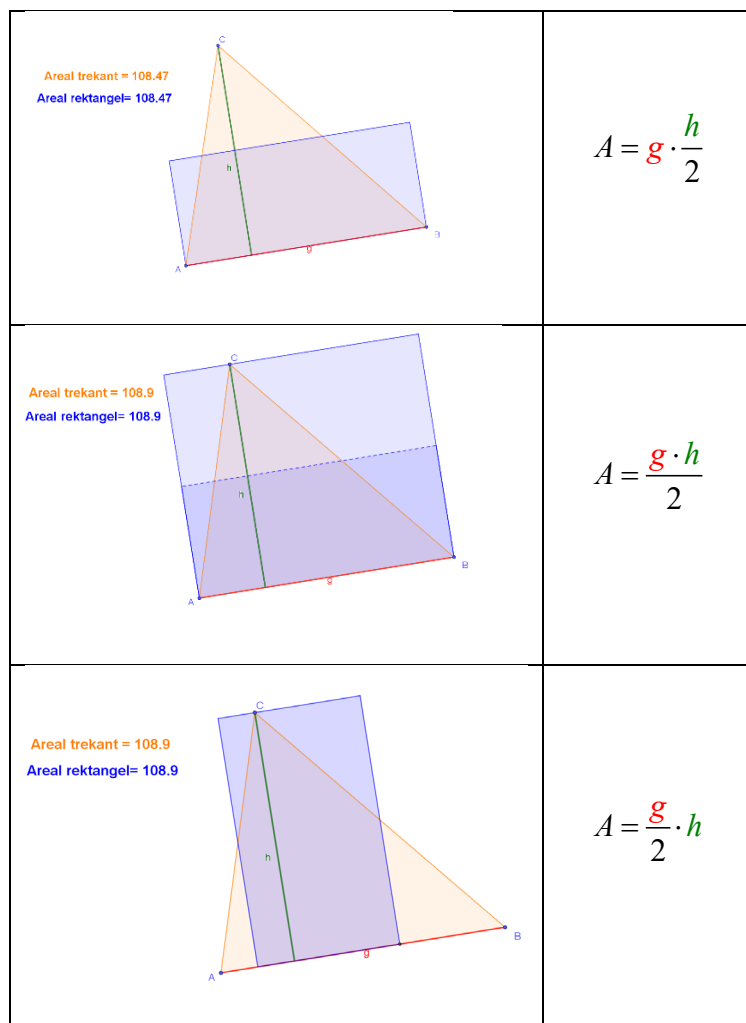
Figur 5 viser tre ulike måter å skrive  $A = \frac{g \cdot h}{2}$ .

$A = \frac{g \cdot h}{2} \quad A = \frac{g}{2} \cdot h \quad A = g \cdot \frac{h}{2}$
---

FIGUR 5

Sammenligner man uttrykkene med illustrasjonen i figur 4 ser man at figuren framstiller

uttrykket  $A = g \cdot \frac{h}{2}$ . De ulike uttrykkene er visualisert i figur 6.



FIGUR 6



Et sentralt spørsmål her er: Må formler for arealet til trekanter bli introdusert på nytt på ungdomstrinnet? Hvis elevene har en god begrepsforståelse for begrepet areal og areal til trekanter fra arbeid på mellomtrinnet, vil begrepene kunne brukes uten ny introduksjon. God repetisjon kan i dette tilfelle være at elevene blir bedt om å skrive arealformelen på forskjellige måter og lage visuelle framstillinger til som i figur 6.<sup>1</sup>

## Oppsummering

Å utvikle god begrepsforståelse er en krevende og vedvarende prosess. Forståelsen for overordnede begreper utvikles over år og den bygges bit for bit eller steg for steg. Ved å få kjennskap til, og erfaringer med, stadig flere egenskaper og kjennetegn til begreper, vil elevene stadig utvide sin forståelsen. Undervisningen må være strukturert og systematisk, med bruk av ulike representasjoner, varierte metoder og ulike arbeidsoppgaver. Samtidig må elevene utfordres til å løse oppgaver uten kjent framgangsmåte, altså problemløsning, hvor begrepene inngår. Da vil elevene etter hvert kunne bruke nye begreper i kjente og ukjente situasjoner og man vil være på sporet av dybdelæring.

---

<sup>1</sup> Les mer i modul 4 God repetisjon og øving

## Litteraturliste

Charles, R. I., & Carmel, C. A. (2005). Big Ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics, *Journal of Mathematics Education*, 7(3) 9-24.

Roos, H. & Trygg, L. (2018). Begrepp och representationer. Hentet fra <https://larportalen.skolverket.se>

Roth, J., (2018, 28. november). Didaktik der Geometrie, kapitel 2: Begriffsbildung. Hentet fra [http://www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/did\\_geometrie/did\\_geometrie\\_2\\_begriffsbildung.pdf](http://www.dms.uni-landau.de/roth/lehre/skripte/did_geometrie/did_geometrie_2_begriffsbildung.pdf)