Misoppfatninger knyttet til tallregning

17.04.18

Olav Dalsegg Tokle, Astrid Bondø og Roberth Åsenhus
MATEMATIKKSENTERET, NTNU

Innholdsfortegnelse

Innledning

Her ser vi på misoppfatninger innen området Tallregning, vi vil vise eksempler på diagnostiske oppgaver, gi korte analyser av oppgavene, og eksempel på elevsvar som kan tyde på at elever er i misoppfatninger.

Oppgavene er utviklet og prøvd ut av Matematikksenteret. Oppgavene tester om elevene er i misoppfatninger knyttet til regneoperasjonene, regler og algoritmer. Standardalgoritmene i matematikk er utviklet over flere hundreår og er effektive regnemåter, men det er ikke alltid lett for elevene å se tanken bak og forstå algoritmen. Manglende forståelse av algoritmer og prosedyrer kan bidra til misoppfatninger i matematikk. En del av vanskelighetene som avdekkes gjennom *Diagnostiske oppgaver knyttet til tallregning*, skyldes også problemer som er beskrevet under M*isoppfatninger knyttet til tall*.

Fjerne og legge til nuller

Mange elever bruker reglene om å fjerne og legge til nuller uten å forstå reglene. Det er naturlig å tenke at dersom en tar bort én eller flere nuller for å gjøre utregningen enklere, må en legge på noen nuller i svaret. Kan en ta bort alle nullene? Hvor mange nuller skal svaret inneholde?

Mange algoritmer og regler i matematikk bygger på mønster og egenskaper i posisjonssystemet. For å kunne bruke disse reglene riktig må elevene forstå hva som skjer med tallene når reglene brukes. Når de ikke har forstått logikken bak reglene, kan det føre til uhensiktsmessig og feil bruk. Reglene kan virke vilkårlige, og de bidrar ikke nødvendigvis til tallforståelse knyttet til posisjonssystemet.

I oppgaver med multiplikasjon eller divisjon med tierpotenser (10, 100, 1000 osv.) løser mange elever oppgavene ved å fjerne eller legge til nuller.

Eksempel på regler:
150 · 30: Ta bort begge nullene, regn ut 15 · 3, sett begge nullene inn i svaret.
150 : 30: Ta bort begge nullene, regn ut 15 : 3, ikke sett noen av nullene inn i svaret.

Elevene bør i stedet for regler få erfaringer med å bruke egenskapene til posisjonssystemet for å løse oppgavene. Eksempler på utregninger med referanse til posisjonssystemet:
150 · 30: 15 · 10 · 3 · 10 = 15 ·3 · 10 · 10 = 45 · 100 = 4500.
150 : 30: Hvor mange ganger går tre tiere opp i 15 tiere eller hvor mye er 15 tiere delt på tre tiere?

Oppgaver

Her er tre oppgaver som kan egne seg til å undersøke om elevene er i en misoppfatning om å *fjerne og legge til nuller* når de skal multiplisere eller dividere tall med tierpotenser.

1. En skole har kjøpt 100 skrivebøker for til sammen 2050 kr.

   Hvor mange kroner koster én skrivebok?

   ◯ 20,50 kr ◯ 25 kr ◯ 205 kr ◯ 250 kr

2. **Regn ut:**

   $5{,}8 \cdot 10 =$

3. **Regn ut:**

   $400 \cdot 500 =$

Analyse

Ved utprøving av oppgaver ser vi at mange elever svarer 25 når de skal dividere 2050 med 100. Feilsvaret kommer av at elever i misoppfatningen *fjerne og legge til nuller* på det å dividere med 100 som å fjerne to nuller, uavhengig av hvilken posisjon nullene har. Disse elevene fjerner de to nullene i 2050. Ved vår utprøving svarte omtrent 30 % av elevene i 6. trinn og 20 % av elevene i 9. trinn 25 i denne oppgaven. De andre feilsvarene i oppgaven kommer av at elevene fjerner én av nullene.

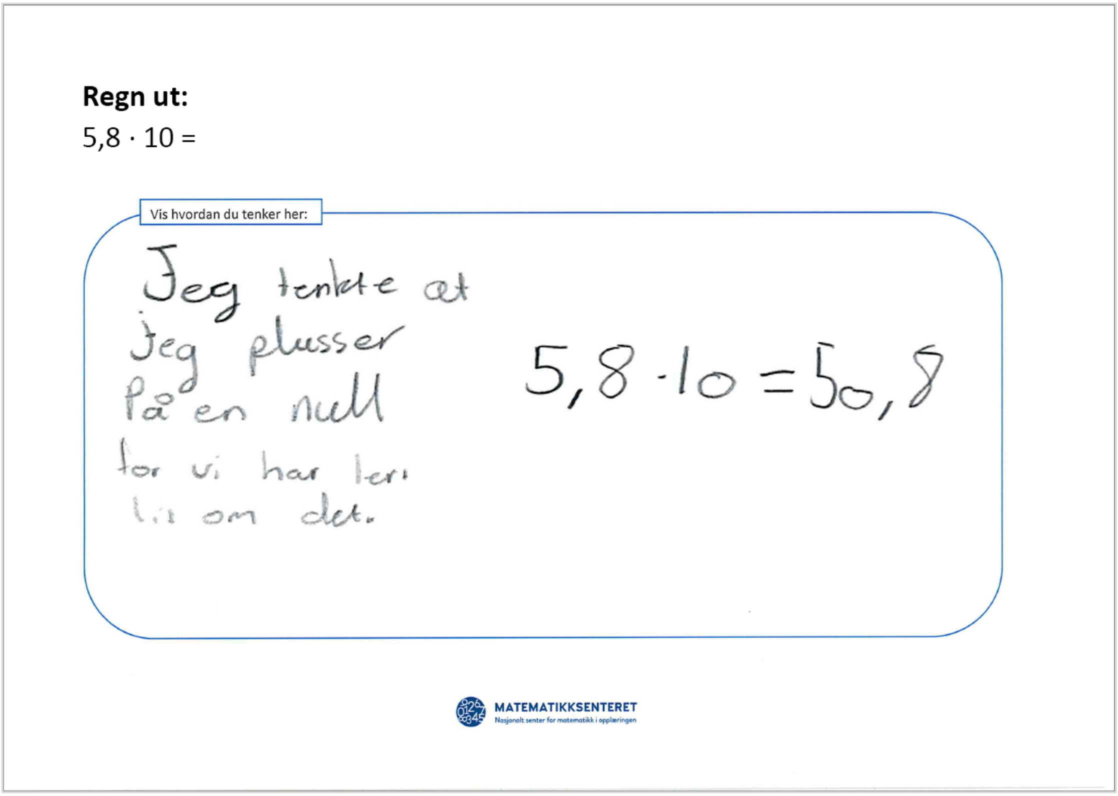
Elever som er i en misoppfatningen om at å multiplisere med 10 er det samme som å legge til en null, vil svare 50,8 eller 5,80 når de skal multiplisere 5,8 med 10. De som svarer 5,80, «legger til en null» bakerst i tallet, mens de som svarer 50,8, «legger en null» til 5. Elever som svarer 50,80 ser trolig på *desimaltall som par av hele tall*. Denne misoppfatningen er beskrevet under *Misoppfatninger knyttet til tall*.

Når elevene skal regne ut $400 \cdot 500$, får de problemer med å «sette på nullene», siden både multiplikand og multiplikator er hele hundrere. I tillegg får vi en ekstra null siden $4 \cdot 5$ er lik

20, og det gjør det utfordrende hvis eleven har blitt forklart at «svaret skal inneholde like mange nuller som faktorene har til sammen».

Elevsvar

Her er noen elevsvar fra da oppgavene ble prøvd ut på elever fra 5. til 10. trinn.



Regn ut:

$5{,}8 \cdot 10 =$

Vis hvordan du tenker her:

Jeg tenkte at jeg plusser på en null for vi har lert litt om det.

$5{,}8 \cdot 10 = 50{,}8$

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

REALFAGSLØYPER

Regn ut:
$5{,}8 \cdot 10 =$ 580

Vis hvordan du tenker her:

$5{,}8 \cdot 10 = 580$

Fordi du plusser bare på en 0

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Regn ut:
$400 \cdot 500 =$ 2000

Vis hvordan du tenker her:

400·500 blir det samme som om vi tar 4·5 som er 20, så bare legger vi på to nuller. Da blir svaret 2000

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Regn ut:

400 · 500 = 200 00

Vis hvordan du tenker her:

Jeg tok 5 · 4 og satte på 4 0 er

MATEMATIKKSENTERET

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

En skole har kjøpt 100 skrivebøker for til sammen 2050 kr.

Hvor mange kroner koster én skrivebok?

○ 20,50 kr ⊗ 25 kr ○ 205 kr ○ 250 kr

Vis hvordan du tenker her:

$2050 : 100 = \underline{\underline{25}}$

$25 \cdot 100 = \underline{\underline{2050}}$

MATEMATIKKSENTERET

Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Største minus minste siffer

Subtraksjon er en mye vanskeligere regneoperasjon enn addisjon, og elever som er usikre på tabellkunnskaper eller ikke har full forståelse av posisjonssystemet, vil ha problemer med subtraksjonsalgoritmen.

En vanlig feil hos elever som misforstår subtraksjonsalgoritmen er at de subtraherer det største sifferet fra det minste uavhengig av hvilket tall det hører til. Eksempel: 82 – 36 = 54 fordi seks minus to er fire og åtte minus tre er fem.

Bakgrunnen for framgangsmåten kan henge sammen med måten subtraksjon blir introdusert på for elevene. Dersom de til å begynne med møter mange oppgaver der denne metoden gir riktig svar, vil noen elever generalisere framgangsmåten til å gjelde alle subtraksjonsoppgaver.
Eksempel: 78 − 33 = 45, fordi 8 minus 3 er 5 og 7 minus 3 er 4.

Det er viktig at læreren er bevisst på at denne misoppfatningen kan oppstå, og på et tidlig stadium presenterer subtraksjonsoppgaver der denne strategien ikke gir riktig svar. For eksempel kan regnestykket 23 − 8 være en introduksjon i subtraksjon for åtteåringer, og et utgangspunkt for å diskutere ulike strategier.

Oppgaver

Her er tre oppgaver som kan egne seg til å undersøke om elevene er i misoppfatningen *største minus minste siffer*.

1. **Regn ut:**
   1027 – 769 =

2. Mohammed har 536 kr. Han ønsker å kjøpe en T-skjorte som koster 279 kr.

   Hvor mange kroner vil Mohammed ha igjen hvis han kjøper T-skjorten?

3. Astrid sparer penger for å kjøpe et par sko som koster 416 kr.
   Hun har spart 179 kr.

   Hvor mange kroner mangler Astrid?

Analyse

Ved utprøving av oppgavene foran, ser vi at omtrent 10 % av elevene i både 6. og 9. trinn svarer 342 eller 1742 i oppgaven uten kontekst (oppgave 1). Disse elevene bruker *største minus minste siffer* som framgangsmåte ved å ta 9 – 7, 6 – 2 og 10 – 7.

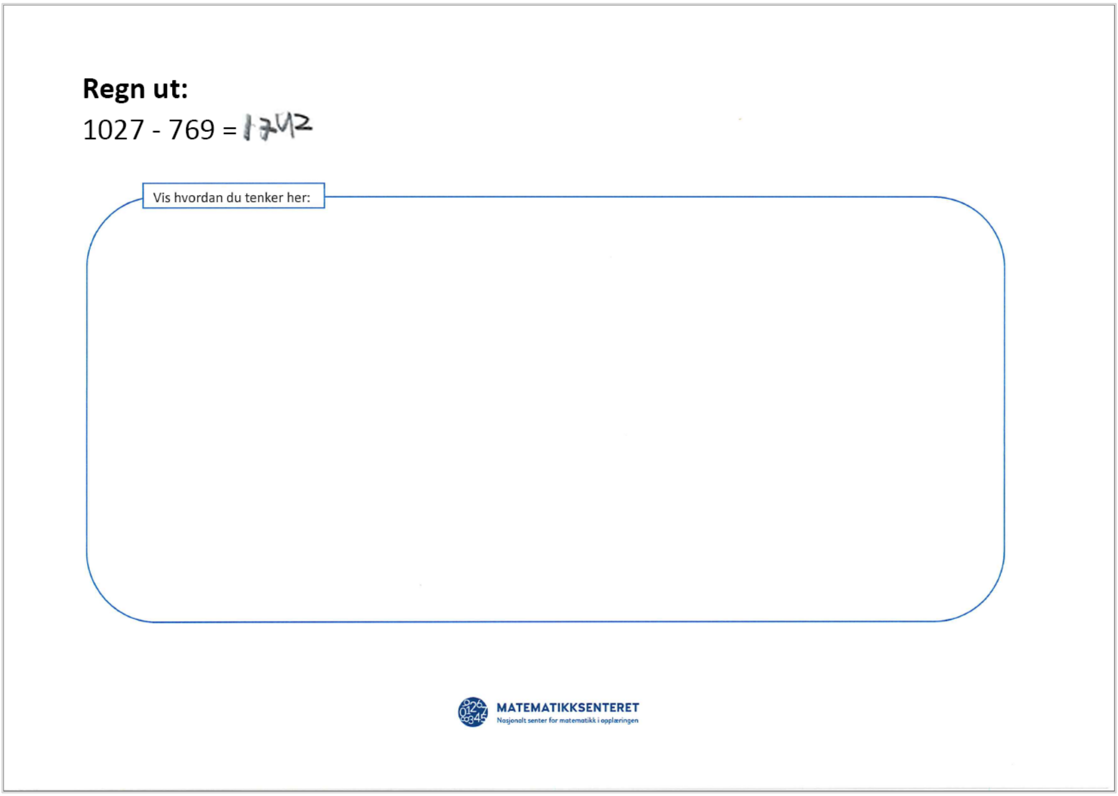
I de to andre oppgavene ovenfor skal elevene utføre subtraksjon i oppgaver med kontekst. Resultatet fra utprøvingen viser at var det langt færre elever på både 6. og 9. trinn som brukte *største minus minste siffer* som framgangsmåte i oppgave 2 og 3 enn i oppgave 1. Det viser trolig at de i større grad opplever metodefrihet og muligheter til å reflektere over egne svar når oppgaven er i kontekst, enn når den er oppstilt.

De andre feilsvarene i oppgavene kommer av at elevene bruker en framgangsmåte eller en algoritme de ikke har forstått fullt ut. Typiske feil er feil i veksling.

REALFAGSLØYPER

Elevsvar

Her er noen elevsvar fra da oppgavene ble prøvd ut på elever fra 5. til 10. trinn.

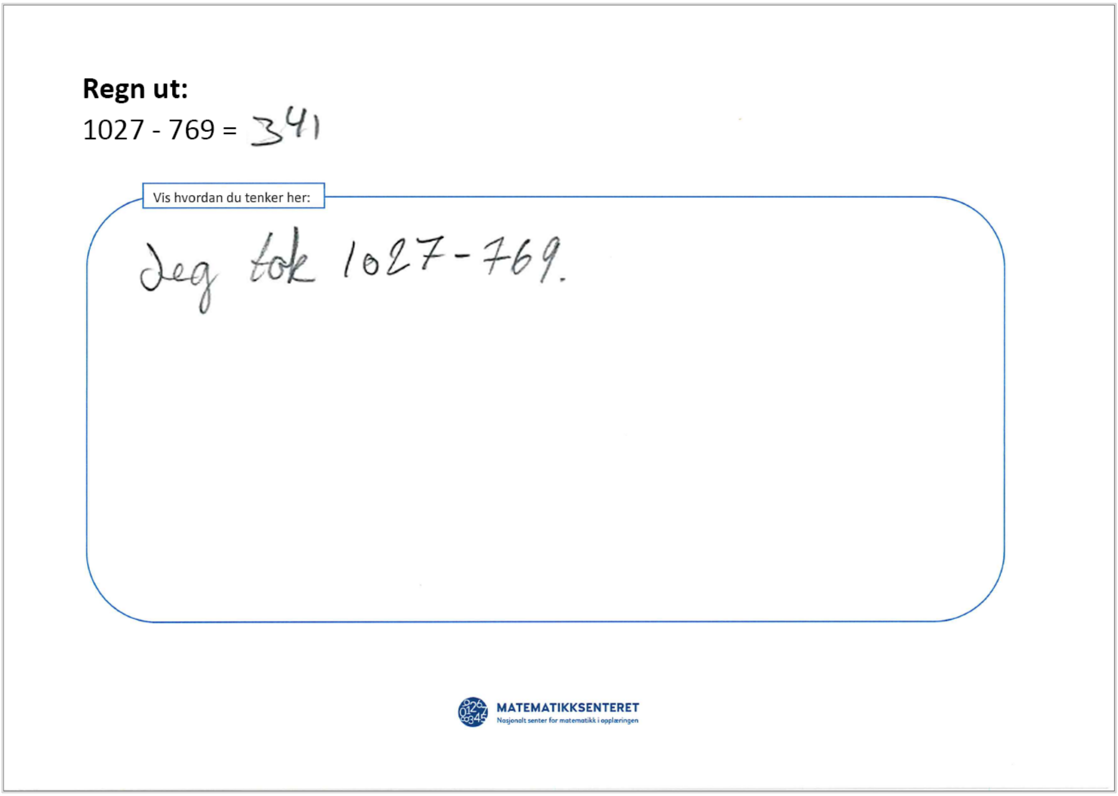


Regn ut:

1027 - 769 = 1742

Vis hvordan du tenker her:

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen



Regn ut:

1027 - 769 = 341

Vis hvordan du tenker her:

Jeg tok 1027-769.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Å dividere et lite tall med et stort tall er umulig

Barn bygger sin første forståelse av de fire regneartene på erfaringer med små hele tall. Innlæring av divisjon skjer ofte gjennom delingsdivisjon, der oppgavene går ut på å dele et tall på et mindre tall. Dette konkretiseres ofte ved at en mengde blir fordelt likt på et gitt antall personer, gjerne som svar på spøsmål av typen: Hvor mye blir det til hver?

Dersom dividenden konsekvent er større enn divisoren, er det lett for at elevene overgeneraliserer og havner i misoppfatningen *å dividere et lite tall med et stort tall er umulig.*

Kommutativ egenskap ved multiplikasjon og addisjon

$a \cdot b = b \cdot a$

$a + b = b + a$

Noen elever vil si at det ikke er mulig å løse slike oppgaver, mens andre løser oppgavene ved å snu divisjonen (reverserer). De tror at divisjon er kommutativ, på samme måte som multiplikasjon.

Gjennom utprøving ser vi at en del elever mener at 6 : 25 er det samme som 25 : 6, og at rekkefølgen av tallene ikke spiller noen rolle.

Oppgaver

Her er tre oppgaver som kan egne seg til å undersøke om elevene er i en misoppfatning om at *å dividere et lite tall med et stort tall er umulig.*

1. Henrik betaler 50 kr for en pakke med 300 vannballonger.

   Hvilket regneuttrykk viser hvor mye én ballong koster.

   ◯ 50 kr : 300 vannballonger
   ◯ 300 vannballonger : 50 kr
   ◯ 300 vannballonger – 50 kr

2. Hanna laget 4 L saft som hun fylte over på like store flasker. Det ble til sammen åtte flasker.

   Hvor mye saft ble det i hver flaske?

3. Skolen til Lise har kjøpt 25 fotballer.
   Fotballene veier til sammen 6 kg. Hver fotball veier like mye.

   Velg regneuttrykket eller regneuttrykkene som viser hvor mye en fotball veier.

   ◯ 25 · 6 ◯ 25 : 6 ◯ 6 : 25 ◯ 6 · 25 ◯ 25 – 6 ◯ 6 + 25

Analyse

I oppgave 1 skal elevene velge riktig regneuttrykk som viser hvor mye én ballong koster, når Henrik betaler 50 kr for 300 ballonger. Resultatene fra utprøving viser at omtrent 40 % av elevene i 6. trinn og 50 % av elevene i 9. trinn svarte at regneuttrykket 300 vannballonger: 50 kr viser hvor mye én ballong koster. Noen av disse elevene begrunner valget sitt med at de ser at det skal være divisjon, men at det ikke er mulig å dele et mindre tall på et større tall.

Samme oppgave ble også prøvd ut i en annen variant der opplysningene kom i motsatt rekkefølge; «Henrik kjøper en pakke med 300 vannballonger og betaler 50 kr». I denne versjonen svarte omtrent 60 % av elevene i både 6. og 9. trinn at 300 vannballonger : 50 kr, altså større prosentandel enn i den første versjonen. Dette kan tyde på at elevene, i tillegg til at de tenker at *å dividere et lite tall med et stort tall er umulig*, er vant med at de skal ta det første tallet og dividere med det andre tallet.

I oppgave 2 ser viser resultatene at mange elever reverserer divisjonen. Noen elever skriver 8 : 4 = 2, mens andre skriver 4 : 8 = 2. Dette tyder på at elevene tar det største tallet og dividerer på den minste, selv om de skriver divisjonsuttrykket riktig.

Oppgaven med «Skolen til Lise har kjøpt 25 fotballer» tester også misoppfatningen *å dividere et lite tall med et stort tall er umulig*. Elevene skal velge riktig regnestykke som viser hvor mye en fotball veier, når fotballene til sammen veier 6 kg. Omtrent halvparten av elevene svarte 25 : 6, og det er også noen elever som svarer at 6 : 25 og 25 : 6 gir riktig svar.

Elevsvar

Her er noen elevsvar fra da oppgavene ble prøvd ut på elever fra 5. til 10. trinn.

Henrik betaler 50 kr for en pakke med 300 vannballonger.

Hvilket regneuttrykk viser hvor mye én ballong koster?

- ○ 50 kr : 300 vannballonger
- ⊗ 300 vannballonger : 50 kr
- ○ 300 vannballonger – 50 kr

Vis hvordan du tenker her:

Fordi 300 - 50 viser bare minus og det må være :

Fordi 50 : 300 Det minste skal ikke først

Dette er riktig 300 : 50 største først.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Hanna laget 4 L saft som hun fylte over på like store flasker.
Det ble til sammen åtte flasker.

Hvor mye saft ble det i hver flaske?

Vis hvordan du tenker her:

4 : 8 = 2

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Skolen til Lise har kjøpt 25 fotballer.
Fotballene veier til sammen 6 kg. Hver fotball veier like mye.

Velg regneuttrykket eller regneuttrykkene som viser hvor mye en fotball veier.

○ 25 · 6 ⊗ 25 : 6 ○ 6 : 25 ○ 6 · 25 ○ 25 - 6 ○ 6 + 25

Vis hvordan du tenker her:

hvis du dele det første tallet med det andre for du svaret.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Skolen til Lise har kjøpt 25 fotballer.
Fotballene veier til sammen 6 kg. Hver fotball veier like mye.

Velg regneuttrykket eller regneuttrykkene som viser hvor mye en fotball veier.

○ 25 · 6 ○ 25 : 6 ○ 6 : 25 ○ 6 · 25 ○ 25 - 6 ○ 6 + 25

Vis hvordan du tenker her:

6:25 går ikke fordi det første sifferet er mindre en det andre.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Multiplikasjon gjør svaret større og divisjon gjør svaret mindre

Når elever blir introdusert for multiplikasjon og divisjon, jobber de med tall som er større enn 1. Da vil de oppdage at produktet har større verdi enn faktorene, og at kvotienten har mindre verdi enn dividenden.

Dersom elevene bare får oppleve multiplikasjon som gjentatt addisjon, vil de utvikle en snever tankemodell for hva multiplikasjon er, og få et ufullstendig begrep om multiplikasjon. Mange vil overgeneralisere og mene at multiplikasjon alltid gir større svar enn utgangspunktet, fordi erfaringene med gjentatt addisjon tilsier det. Da blir det vanskelig å gjøre overslag i regneuttrykk som 324 · 0,38.

Tilsvarende vil elever som møter divisjon bare som delingsdivisjon ikke kunne knytte en praktisk mening til divisjonsoppgaver der de må bruke målingsdivisjon. I delingsdivisjon kommer det fram i oppgaven hvor mange mengden skal fordeles på. Spørsmålet er hvor mye det blir på hver. Dersom divisoren er et desimaltall vil det være unaturlig for elevene å knytte situasjonen til divisjon.

Eksempel: 3 : 0,5.
Elevene kan for eksempel tenke at tre kroner skal deles på 0,5 barn. Det gir lite mening, men noen vil kunne resonnere seg fram til en løsning på problemet ved å bruke multiplikasjon (6 · 0,5 = 3). Dette er en fin strategi, men det er ikke opplagt for elevene at det er divisjon de skal knytte til situasjonen.

Derfor er det viktig at elevene får erfaringer med målingsdivisjon. I oppgaver med målingsdivisjon er det opplyst hvor mye det skal være i hver mengde. Svaret er hvor mange det rekker til.
Elevene kan for eksempel tenke at tre liter saft skal deles på flasker som rommer en halv liter hver. Hvor mange flasker må til? Her kommer det fram av situasjonen at det dreier seg om fordeling (deling).

Oppgaver

Her er tre oppgaver som kan egne seg til å undersøke om elevene er i misoppfatningen *multiplikasjon gjør svaret større og divisjon gjør svaret mindre.*

1. Studer regnestykket 578 · 0,69.

   Hvilken påstand er riktig?

   ◯ Svaret blir større enn 578
   ◯ Svaret blir mindre enn 578
   ◯ Svaret blir omtrent 578

2. Studer regnestykket 578 : 0,69.

   Hvilken påstand er riktig?

   ◯ Svaret blir større enn 578
   ◯ Svaret blir mindre enn 578
   ◯ Svaret blir omtrent 578

3. **Regn ut:**

   4 : 0,5 =

Analyse

I oppgave 1 skal elevene ta stilling til tre påstander om regnestykket 578 · 0,69. Mange av elevene som svarer at svaret blir større enn 578 begrunner dette med at når vi multipliserer eller ganger blir svaret større. Resultatene fra utprøvingen viser at nesten 40 % av elevene i 6. trinn svarte at svaret blir større enn 578. Tilsvarende tall på 9. trinn er omtrent én seksdel av elevene.

Som elevsvarene viser kommer også samme tankegang fram når elevene skal ta stilling til påstander om 578 : 0,69.

Elevsvar

Her er noen elevsvar fra da oppgavene ble prøvd ut på elever fra 5. til 10. trinn.

Studer regnestykket 578 · 0,69.

Hvilken påstand er riktig?

- ☒ Svaret blir større enn 578
- ○ Svaret blir mindre enn 578
- ○ Svaret blir omtrent 578

Vis hvordan du tenker her:

Fordi hær er det ganging og ganing blir aldri mindre.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Studer regnestykket 578 · 0,69.

Hvilken påstand er riktig?

- ○ Svaret blir større enn 578
- ○ Svaret blir mindre enn 578
- ☒ Svaret blir omtrent 578

Vis hvordan du tenker her:

fordi den er på null .

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Studer regnestykket 578 : 0,69.

Hvilken påstand er riktig?

- ○ Svaret blir større enn 578
- ● Svaret blir mindre enn 578
- ○ Svaret blir omtrent 578

Vis hvordan du tenker her:

På deling blir jo svaret alltid mindre.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Regn ut:

4 : 0,5 =

Vis hvordan du tenker her:

= 8 eller 2.

MATEMATIKKSENTERET
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Oppsummering - Misoppfatninger Tallregning

Fjerne og legge til nuller

Dette er en regel mange elever blir presentert for i arbeid med addisjon og subtraksjon. Eksempel: I regnestykket 50 − 20 kan en tenke at fem tiere minus to tiere er tre tiere. Det er lettere å si bare 5 minus 2 enn å si hva posisjonene står for. Elevene fjerner nullene, regner ut og legger til en null i svaret. Om denne regelen fungerer i addisjon og subtraksjon, kan den føre til problemer i multiplikasjon og divisjon.

Største minus minste siffer

Dette innebærer at elevene subtraherer det minste sifferet fra det største, uavhengig hvilket tall det hører til. Eksempel: 82 − 36 = 54 fordi 8 minus 3 er 5, og 6 minus 2 er 4. Subtraksjon er en mye vanskeligere regneoperasjon enn addisjon, og elever som er usikre på tabellkunnskaper eller ikke forstår posisjonssystemet vil ha problemer med subtraksjonsalgoritmen.

Å dividere et lite tall med et stort tall er umulig

Dette er en vanlig oppfatning blant elevene. Det kan skyldes at divisjon gjerne blir innført som delingsdivisjon, der et antall av noe skal fordeles på noen. Eksempel: 4 : 6. Elevene får mange erfaringer med at det første tallet er større enn det andre, og tror at det alltid må være slik i divisjon.

Multiplikasjon gjør svaret større, divisjon gjør svaret mindre

Dette er en vanlig misoppfatning som bygger på erfaringer elevene har gjort seg i arbeid med positive hele tall. Det er ikke overraskende at de ser på dette som en generell regel, og at det er problematisk å endre denne forestillingen og få den til å passe i nye situasjoner. For å få oppfatningen til å stemme, hender det at elever med eller uten hensikt bytter én operasjon med en annen. Eksempel: Elevene velger divisjonsuttrykk for å finne svar på denne oppgaven: Hvor mye koster 0,6 kg kjøttdeig når 1 kg koster 69 kr?