Anne Gunn Svorkmo

Gode oppgaver – mange muligheter

Jeg samler på gode oppgaver i matematikk, og er alltid på jakt etter flere til samlingen min. Jeg stiller imidlertid visse krav til oppgavene jeg leter etter. Oppgaven skal være slik at flest mulig elever skal kunne arbeide med den, den skal være enkel å komme i gang med, og det må ligge en eller annen matematisk tanke bak. Når oppgaven er løst, skal problemstillingen sammen med resultatet, gjøre elever interessert og nysgjerrig på nye og lignende oppgaver.

En god oppgave kan sammenlignes med et isfjell. Det er bare oppgaveformuleringen som er synlig, og oppgaven kan i første omgang se forholdsvis liten og enkel ut. På samme måte som hos et isfjell, skjuler det seg mye mer, i det her tilfellet mange muligheter, under overflata.

Dessverre blir ikke oppgaven god bare ved at den blir merket med tre eller fire stjerner. En god oppgave blir først god ved hjelp av en lærer. Før undervisningen må læreren ha identifisert noen av de matematiske idéene i oppgaven, og hun må ha en viss formening om hvilke muligheter og begrensninger oppgaven kan gi. Dersom læreren kan se for seg hvordan oppgaven kan forenkles eller utvides, blir det enklere å drive tilpasset opplæring. En lærer må også ha tenkt gjennom hvordan oppgaven på best måte kan presenteres for elevene. Hun er den som skal lede elevene gjennom læringsprosessen og hjelpe dem med å strukturere den matematiske tenkingen. Matematikken må synliggjøres og løftes fram for elevene, og læreren er den som må sørge for at det skjer. Dette foregår blant annet gjennom diskusjoner og ved å stille spørsmål. Nøkkelspørsmålene, dvs. hvilke spørsmål som bør stilles i den enkelte sammenhengen, bør også være noe læreren har tenkt gjennom i forkant av undervisningen. Slike spørsmål kan fremme elevenes ulike måter å tenke på. En god læringssituasjon legger opp til å stille spørsmål, kanskje først fra læreren, senere fra elevene. Lærerens «hvorfor» skal bli elevenes «hvorfor» (Skovsmose, 2003). Elevene må også trene på og lære å stille spørsmål.

Anne Gunn Svorkmo
Matematikksenteret
Anne-Gunn.Svorkmo@matematikksenteret.no

Ball m.fl. kaller denne formen for lærerkunnskap for spesialisert matematikkunnskap (Ball, Thames & Phelps, 2008). Det er en kunnskap, kompetanse og innsikt som en matematikklærer bør ha, og som kommer i tillegg til og er noe mer enn den faglige, generelle matematikkunnskapen.

Når elever arbeider med gode oppgaver, ønsker jeg at elevene skal oppleve det å stille spørsmål som en naturlig del av oppgaven. Å stille spørsmål støtter en utforskende måte å arbeide på. Jeg ønsker at elevene skal bli nysgjerrige på matematikk, og at de skal oppleve faget som et kreativt fag. Spørsmålene kan enten være knyttet opp mot problemstillingen, løsningsprosessen eller mot selve svaret. Disse spørsmålene kan være oppstarten på nye oppgaver som for eksempel kan starte slik: Hva hvis du har …, enn om det bare er …, er det mulig å …, hva skjer hvis … eller dersom vi tar … hva vil skje da?

Den gode oppgave for meg, er en problemløsingsoppgave som en ser nytten i, eller får lyst til å løse. Man kjenner ikke på forhånd til en metode for å kunne løse oppgaven. For at det jeg leter etter skal kunne identifiseres som et problem, skal det kunne kreves både tid og krefter for å finne en løsning. Dette er en blant mange definisjoner på et problem (Björkqvist, 2003, Hagland m.fl., 2005).

De kravene jeg stiller til den gode oppgave er sammenfallende med mange av de kriteriene som boka «Rika matematiska problem» beskriver som problemløsingsoppgaver (Hagland m.fl., 2005). Rike oppgaver har vært en av mine inspirasjonskilder. Den gode oppgave, slik jeg ser det, er en oppgave med mangfold og muligheter. Når det gjelder differensieringsmulighetene, ligger disse ofte i selve oppgaven. Den skal både kunne forenkles, utvides, utvikles og løses på mange ulike måter.

Oppgaven bør egne seg bedre til å samarbeide om, enn å løses individuelt. Mulighetene med oppgaven vil etter det jeg har erfart, komme tydeligere fram i en diskusjon og i en løsningsprosess i samspill med en annen. Skriftliggjøring er også et viktig moment. Mangfoldet i oppgaven synliggjøres ofte i elevers ulike måter å gjøre notasjoner på i løsningsprosessen. Fra dette skriftlige materiellet kan læreren finne mye å gripe fatt i og følge opp videre. Som lærer bør jeg være oppmerksom og bevisst på at det finnes ulike måter å fremstille en matematisk tanke på.

I denne artikkelen vil jeg vise hvordan jeg har arbeidet med en av mine favorittoppgaver, nemlig en myntoppgave som Ingvill Stedøy-Johansen introduserte for meg. Jeg vil beskrive hvilke grep jeg som lærer gjorde for å tilrettelegge for ønsket elevaktivitet i to dobbeltøkter, fordelt på to påfølgende dager. For å synliggjøre mangfoldet og mulighetene med oppgaven, vil jeg vise noen elevbesvarelser fra 5. trinn. Disse er hentet fra min masteroppgave «Rike matematiske problemer og spørsmålsformuleringer i matematikkundervisningen» (Svorkmo, 2007).

Myntoppgaven

Jeg har åtte mynter i lomma, og jeg har til sammen 50 kroner.

Hvilke mynter har jeg i lomma mi?

Jeg delte arbeidet med oppgaven inn i fire faser:

1. Myntoppgaven presenteres muntlig for elevene i lytterkroken.
2. Oppfølgingsspørsmål: Tror dere at dere har funnet alle løsningene eller ikke? Forklar hvorfor dere tror det.
3. Elevene lager selv en oppgave med inspirasjon fra myntoppgaven
4. En ny myntoppgave uten løsning presenteres for elevene.

Fase 1:

Etter at oppgaven ble presentert muntlig for elevene i lytterkoken, ble stikkordene 50 kroner og åtte mynter skrevet på tavla. Alle elevene hadde det da klart hva de skulle gjøre når de i neste omgang forflyttet seg fra lyttekroken til arbeidsplassene sine. To og to elever samarbeidet om oppgaven, og hadde et felles ark til å notere på. På dette arket skulle det vises spor etter hvordan de hadde tenkt. De kunne tegne, skrive eller gjøre begge deler.

I løpet av denne arbeidsøkta var jeg var innom alle gruppene. Mitt mål var:

– å få elevene, ut fra det de hadde skrevet på arket, til å forklare hva de så langt hadde kommet fram til
– å stille spørsmål om det var mulig at det kunne være mer enn en løsning

Etter en passende arbeidsøkt samlet jeg elevene i lyttekroken. Arkene som elevene hadde skrevet på, var med. Elevene presenterte løsningene sine for hverandre. Jeg skrev ned det elevene dikterte på en flippover. En løsning var seks 5-ere og to 10-kr, en annen var fem kronestykker, en 5-er og to 20-kr. Jeg spurte etter flere løsninger selv om jeg visste at det ikke fantes flere. Overraskende nok dukket det opp enda flere forslag, og disse ble også skrevet på flippoveren. Det var elevene selv som så at de siste løsningene var det samme som en av de to første, bare at rekkefølgen på myntene var annerledes. Elevene kom selv fram til at rekkefølgen på myntene ikke spilte noen rolle i denne sammenhengen. Foreløpig hadde vi funnet to løsninger.

Fase 2:

Samlingen i lytterkroken ble oppsummert på følgende måte: Vi har nå funnet to løsninger. Det er mulig det finnes flere, eller kanskje det ikke gjør det? Tror dere at dere har funnet alle løsningene eller ikke? Forklar hvorfor dere tror det.

Ettersom dette ikke var så lett å forklare for elevene, viste jeg et par eksempler på hvordan en slik forklaring kunne starte. Om elevene ønsket å bruke tipsene som for anledningen var skrevet på tavla, var valgfritt.

– Vi tror at det finnes flere løsninger fordi …
– Vi tror ikke at det finnes flere løsninger fordi …

Elevene gikk deretter tilbake til arbeidsplassene og prøvde så godt de kunne å svare på hvorfor de trodde eller ikke trodde at de hadde funnet alle løsningene. De skulle skrive ned det de kom fram til på et ark.

Elevene måtte her forholde seg til betingelsene i oppgaven, dvs. antall mynter og summen av disse. Samtidig måtte de betrakte den enkelte myntenheten for seg selv, men også i kombinasjon med de andre myntenhetene.

Her er noen eksempler på elevenes forklaringer. Spørsmålet var «Tror dere at dere har funnet alle løsningene eller ikke? Forklar hvorfor dere tror det.»

Ine og Finn: Vi tror at det ikke finnes flere muligheter fordi … Det er litt rart om 18 personer ikke finner flere … Dessuten går det ikke an og bruke 50 øre … fordi det er så smått.

Vilde og Tom: Sikkert flere men de er vanskelige og finne ut. Og bruke penger kunne ha vært en bra løsning til flere.

Anne og Vera: Vi tror ikke det finnes flere fordi vi har prøvd alle vi klarte, og at vi ikke kan ta med lapper og 50 ører. Da blir det for lite. Vi har prøvd mange forskjellige svar og vi fant 2 svar. Med tre 20 kroner blir det også for mye og det må være med 8 mynter.

Pål og Vivi: Vi tror det finnes flere løsninger. Men vi lurer fortsatt på hvordan vi finner dem. For hvis vi finner en løsning, er den enten skrevet opp eller så er det for lite mynter eller for mange.

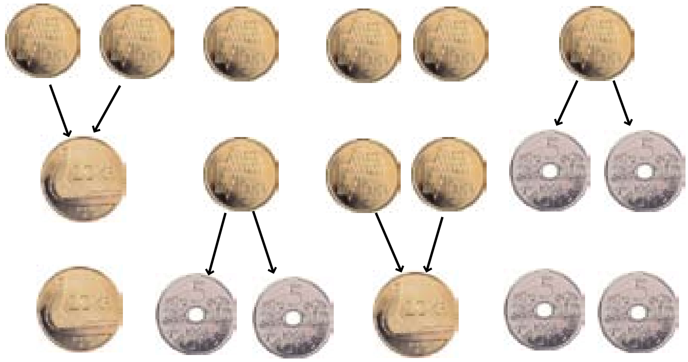
Første dobbeltøkt gikk mot slutten, og den ble avrundet med at elevene leste opp sine forklaringer for hverandre i lyttekroken.

Fase 3:

Neste dag fortsatte vi med det videre arbeidet med myntoppgaven. Elevene skulle nå selv lage en oppgave, gjerne inspirert av den oppgaven vi hadde arbeidet med dagen i forvegen. For at oppgaven ikke skulle bli for omfangsrik, laget jeg noen rammer. Maks antall mynter elevene kunne bruke var 10, og summen kunne ikke overstige 100 kroner. Dessuten skulle oppgaven ha mer enn en løsning. Her fikk elevene bruke plastpenger dersom de ønsket det. Mange valgte å tegne myntene.

To og to elever laget hver sin oppgave, og jeg ble overrasket over at mange av oppgavene som ble produsert hadde ett fellestrekk. Antall mynter elevene brukte i oppgavene sine, var det samme som antall tiere i summen. For eksempel:

– Jeg har seks mynter i lomma og har til sammen 60 kroner, eller jeg har ni mynter i lomma og har til sammen 90 kroner.



Figur 1. Veksling av mynter.

Hvorfor ble så mange oppgaver formulert på denne måten? En mulig årsak kan være at med denne formuleringen visste elevene at det i alle fall fantes en løsning på oppgaven deres. Mange elever tok utgangspunkt i antall 10-ere da de løste egne oppgaver. Hvis oppgaven gikk ut på å finne hvilke 6 mynter som hadde summen 60 kroner, tegnet de først opp den mest innlysende løsningen dvs. med seks 10-ere (noen gjorde det samme med plastpenger). Deretter vekslet de to 10-ere til en 20-kr mynt, samtidig som de vekslet en annen 10-er til to 5-ere. Ved å løse oppgaven på denne måten, var summen hele tiden konstant, og det samme var antall mynter. Mange elever tegnet dette som i figur 1.

Oppsummeringen av denne fasen, var å presentere de ulike oppgavene for hverandre, ikke å skrive opp og forklare alle løsningene. Elevene kunne selvfølgelig si hvor mange løsninger de hadde funnet. Det var en ærlig sak å innrømme at de ikke var sikker på om de hadde funnet alle løsningene. Stikkord ble skrevet på tavla for eksempel:

– 6 mynter og 60 kroner, 3 løsninger

Fase 4:

Elevene hadde i løpet av de tre foregående fasene kommet godt inn i problematikken med myntoppgaven. Til slutt ønsket jeg å utfordre elevene med en oppgave som ikke hadde løsning.

Elevene hadde, ut fra det jeg kjente til, ikke tidligere arbeidet med oppgaver hvor svaret var: det finnes ingen løsning, eller det går ikke an å løse denne oppgaven med disse kriteriene.

Jeg var derfor spent på hva som kom til å skje. Oppgaven lød som følger: «Jeg har fem mynter og har til sammen 20 kroner. Hvilke mynter kan det være?»

Alle elevene arbeidet parvis med oppgaven. Jeg intervjuet ett av parene etter at de hadde arbeidet en stund med oppgaven og nærmet seg en løsning.

Spørsmålet som ble stilt i fase 2, «Tror dere at dere har funnet alle løsningene eller ikke?» ble uoppfordret brukt av elevene da de forklarte meg hva de var kommet fram til. Elevene begrunnet også svaret sitt uten oppfordring.

Elevene jeg intervjuet, Ine og Filip, brukte plastpenger i løsningsprosessen, men hadde skrevet hva de hadde kommet fram til underveis på et ark.

Jeg innledet samtalen med å spørre dem hva de hadde gjort.

Ine: Vi begynt med å prøv. Vi prøvd om vi bare hadd hatt 10 krona, men det går jo an med fire femmera, men

Filip: Men det skull vær fem mynta.

Ine: Så da fant vi ut at 50 øringen va for lite og 20 kroningen den går ikke an å bruk.

Filip: Nei.

Ine: Så derfor prøvd vi først med den der. (Elevene viser til det de har skrevet på arket: 10+5+1+1+1+1+1).

Anne-Gunn (AG): Mmm, altså med en 10-er, og en 5-er og fem 1 krona.

Ine: Det går jo selvfølgelig an bare å ha en 10-er i stedet for 1 kronan, så får vi tjue, men det går ikke det heller

Filip: så da ble det for lite mynta. Hvis vi tar 10-er, 5-er og fem 1-krona blir det for my.

AG: Akkurat.

Ine: Det går ikke an å bruk fem, fem, nei tre 5-era og så går det ikke an å bruk en 10 krone og to 5-era

Filip: Nei.

AG: (Leser høyt det elevene har skrevet på arket) 20 kroner er for stor og 50 øre for lite. Man kan, dåkker har faktisk funne ut at to mynta kan vi ikke bruk. Vi har igjen bare en krona og 5 krona og 10 krona.

Filip: Så fant vi ut at tre 1-krona kunn vi heller ikke bruk da. Men da ble det for lite.

Ine: Da måtta vi bruk fem av den. Vi mått bruk fem av den for å bruk den.

AG: Ja

Ine: Så det går ikke. Det blir hele svaret.

Tidlig i prosessen eliminerte Ine og Filip bort 50-ører og 20-kr. Av de resterende myntene kombinerte de myntene slik at de fikk en nærliggende løsning som tilfredstilte én av de to forutsetningene i oppgaven, dvs. at summen av myntene skulle være 20 kroner.

Med utgangspunkt i dette eksempelet bestående av fem 1-kr, en 5-er og en 10-er, vekslet elevene seg fram og tilbake med plastmyntene. Dette gjorde de for å kunne se om de klarte å oppfylle den andre forutsetningen i oppgaven, nemlig at det skulle være fem mynter til sammen.

Dersom jeg sammenligner oppgaven fra fase 1 og oppfølgingsspørsmålet fra fase 2, presser denne oppgaven i større grad elevene til å betrakte kombinasjonene av myntene. Ine og Filip gikk ikke gjennom kombinasjonene systematisk. Ettersom de tar utgangspunkt i kombinasjonen 10 + 5 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 og resonnerer videre ut fra dette eksempelet, klarer de likevel å betrakte alle kombinasjonsmulighetene med de resterende myntene.

Eksempelet Ine og Filip viser, er et eksempel på hvordan elevene nyttiggjorde seg de erfaringene de hadde opparbeidet seg med oppgaven fra fase 1. I fase 4 brukte elevene myntenhetene i større grad da de forklarte, og begrunnet hvorfor de ikke fant noen løsning på problemet.

«Kan vi reis til et anna land,» spurte Niklas høyt slik at alle elevene i gruppa hørte spørsmålet.

«Hvorfor spør du om det,» spurte jeg. «Jo fordi dæm har andre penga (han mener mynter),» sa Niklas. Jeg spurte videre: «Hva slags penger er det du vil ha da?» Niklas svarte: «4-kroninga.» «Ok, det er greit. Bare reis til et anna land du,» svarte jeg.

Spørsmålet til Niklas hadde tydelig påvirket mange av de andre elevenes sine løsninger. Det kom tydelig fram da vi på slutten av økta møttes i lyttekroken. Elevene hadde arkene som de hadde skrevet sine løsninger på, tilgjengelig. Her var det mye interessant som kom fram i elevenes presentasjoner. Jeg skal vise til et par eksempler, men tar ikke med resonnementet på hvorfor elevene trodde det ikke fantes noen løsninger. Her gjengir jeg bare konklusjonen og de videre fabuleringene til elevene.

– Vi finner ingen løsning. Vi skulle ha hatt 4-kr, 2-kr, 3- kr, 6-kr så hadde vi klart det!
– Det finnes ingen nøyaktig løsning. Det nærmeste vi kommer er 5 + 5 + 5 + 5 + 0,50 = 20,50. Løsning med andre mynter: 5 + 5 + 5 + 3 + 2 = 20. Vi burde ha hatt 3-kroning og 2-kroning i Norge.

Overraskende nok ble oppgaven med ingen løsning mottatt av elevene på samme måte som hvilken som helst annen oppgave. De godtok «det finnes ingen løsning» eller lignende formuleringer som et svar. Jeg ble overrasket over det. I oppsummeringa i lytterkoken ble vi enige om at noen oppgaver ikke lar seg løse, og da må svaret bli at det ikke finnes en løsning.

Jeg trodde at oppgaven ville være ferdigløst når elevene hadde kommet fram til dette. Der tok jeg feil. Det var interessant å se at elevene lagde sine egne kriterier, slik at oppgaven kunne løses. Spesielt interessant var det at ett elevpar løste oppgaven ved å finne det de mente var den «nærmeste» løsningen på problemet! Jeg hadde aldri kommet på den idéen!

Her sluttet myntoppgaven for disse elevene.

Når er en oppgave god?

Kravene til den gode oppgave sier noe om kvaliteten, mulighetene og mangfoldet med slike oppgaver. Jeg mener at gode oppgaver også har gitt meg innspill og idéer til egen undervisning.

Jeg har blitt mer bevisst på den matematiske idéen en eller flere oppgaver bygger på. For meg som lærer er det viktig å få tak i idéen bak en oppgave, se det generelle med en oppgave og ikke bare betrakte en enkelt oppgave isolert. Det gjør at jeg lettere kan omformulere, forenkle eller utvide oppgaven, slik at den passer til elevene. Jeg liker å utforme oppgaven som et oppdrag, som igjen utfordrer elevenes sammensatte kunnskaper i matematikk (Emanuelson & Bergius, 2011). Dette er et viktig moment i problemløsing. Med litt trening finner jeg også ofte oppgaver som ligner eller bygger på samme idé. Da har jeg mer enn nok å ta av i undervisningssammenheng, fordi jeg ser variasjonsmulighetene innenfor en enkelt oppgave.

Når jeg blar i ei lærebok, har jeg også her blitt mer oppmerksom på idéer ulike oppgaver bygger på, enn det jeg har vært tidligere. Ved å være dette bevisst, blir jeg også mer våken på hva det er elevene skal lære ved å arbeide med disse oppgavene. Kanskje kan flere oppgaver på ei side i ei lærebok, slås sammen til en oppgave ved at de omformuleres til et oppdrag? Det kan være utfordrende, men jeg mener jeg lærer mye ved å søke etter de mulighetene.

For at mangfoldet og mulighetene med en god oppgave skal tre fram er en avhengig av flere faktorer. For det første avhenger det av hvordan læreren styrer og veileder elevene gjennom prosessen hvor målet er at de skal lære, samtidig som elevene arbeider med oppgaven. Dette nevnte jeg innledningsvis. Myntoppgaven viser eksempler på hvordan en lærer kan arbeide seg gjennom de ulike fasene av oppgaven sammen med elevene. Myntoppgaven ble her presentert muntlig for alle elevene da gruppa var samlet i lyttekroken. I andre sammenhenger hvor jeg har vært sammen med elever på småtrinnet, har jeg ofte tegnet oppgaven på tavla. Uansett hvordan en oppgave presenteres for elevene, er målet mitt at elevene klarer å danne seg et bilde og en oversikt over hva problemet går ut på før de begynner å arbeide med oppgaven. Å kunne formulere spørsmål er et interessant fenomen i matematikkundervisningen. Jeg mener spørsmålsformuleringer kan ses på som et pedagogisk virkemiddel eller en metode. Når elever får trening i å stille spørsmål, tør jeg påstå at de kan være mer kreative på det her området enn lærere.

En god oppgave skal lede elevene til å stille spørsmål som i neste omgang kan bli til nye oppgaver. På denne måten blir de også mer bevisste på hvordan problemløsingsoppgaver i matematikk er bygd opp. Hvilke opplysninger må være med, hva skal det spørres etter og hvordan må da spørsmålet formuleres? Her kan det være små nyanseforskjeller i formuleringen som kan føre til at oppgaven oppfattes på ulike måter. Elevene må, etter å ha laget en oppgave, selv løse den, og kan dermed oppdage uklarheter i egne oppgaver. Motivasjonen for å løse egne og etter hvert hverandres oppgaver, er ofte større enn å løse oppgaver fra ei bok.

Jeg mener elever kan lære matematikk ved å stille spørsmål. Ved å arbeide med denne form for problemløsingsoppgaver, har jeg sett muligheter med det å betrakte elevene både som produsenter og konsumenter av oppgaver. Det gir variasjoner i matematikkundervisningen.

Den gode oppgave har for meg etter hvert blitt noe mer enn en oppgave med mange muligheter, som kan tilpasses og utfordre den enkelte

(fortsettes side 32)

regnestykker når de skal komme med et overslag, regne skriftlig eller regne i hodet. Disse bildene er grunnlaget for tallforståelse og regning, og som vi har sett, åpner de for dyp matematisk tenking, argumentasjon og generalisering tidlig i skolegangen. Dermed er de et av de viktigste redskapene vi har når vi skal tenke matematisk i regning, og det er viktig at elevene tar i bruk disse bildene som redskaper mer bevisst.

Referanser

Boaler, J. (2008). *What's math got to do with it? Helping children learn to love their least favorite subject-and why it's important for America.* USA : Penguin Group.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Portsmouth: N.H., Heinemann.

Kilpatrick, J. Swafford, B. Findell, (red.) (2001). *Adding it up*. Washington DC: National Academy Press.

KD (2006). *Læreplanverket for kunnskapsløftet*. Oslo: Utdanningsdirektoratet.

Schifter, D., Bastable, V. & Russell, S. J. (2008). 'Developing mathematical ideas'. I *Reasoning Algebraically about operations, Facilitator's guide*. Dale Seymour Publications.

(fortsatt fra side 7)

elev. Det blir for meg og mine elever også en måte å tilnærme seg og arbeide med matematikk på. Kanskje en slik måte å arbeide på også utvikler min egen undervisningskunnskap?

Referanser

Ball, D., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). 'Content knowledge for teaching. What makes it special?' *Journal of Teacher Education*, 59, s. 389-407.

Björkqvist, O. (2003). Matematisk problemløsning. I: Grevholm, B. (red). *Matematikk for skolen.* Bergen: Fagbokforlaget.

Emanuelson, L. og Bergius, B. 2011: 'Det cirklar runt cirklar'. I: Nämnaren NR 2, 2011.

Hagland, K., Hedrén, R. & Taflin, E. (2005): *Rika matematiska problem, inspirasjon till variasjon.* Stockholm: Liber.

Skovsmose, O. (2003). 'Undersøgelseslandskaber.' I: Skovsmose, O. & Blomhøj, M. (red.) (2003). *Kan det virkelig passe – om matematiklæring.* København: L&R Uddannelse.

Svorkmo, A-G. (2007): *Rike matematiske problemer og spørsmålsformuleringer i matematikkundervisningen. Hvordan kan samspillet mellom disse fremme 11-åringers matematiske resonnementer?* Høgskolen i Sør-Trøndelag, Avdeling for lærer- og tolkeutdanning. Lest 30.10.11 på brage.bibsys.no/hist/handle/URN:NBN:no-bibsys_brage_21588