Stedøy

Avansert tenking for alle

I denne artikkelen presenteres en problemløsingsoppgave som brukes til å gi elevene muligheter for resonnement og problemløsing, til å bruke og utvikle matematiske representasjoner, bli oppmuntret til meningsfulle matematiske samtaler, oppleve at det å streve lenge med en oppgave og gjøre feil underveis kan bidra til ny innsikt og læring, og at samarbeid med andre elever gir stor gevinst, både sosialt og for å lære mer.

Alle elever skal tilbys like muligheter til avansert matematisk tenking. Læreren skal oppfatte alle elever som fornuftig tenkende (sense makers) (Leinwand et al., 2014).

Dette er kjernen i gode prinsipper for undervisning i matematikk. Med dette som utgangspunkt skal læreren legge til rette for å tilby elevene oppgaver som fremmer resonnement og problemløsing. Det skal være ufarlig å ta sjanser og gjøre feil, og det skal være normalt å måtte forkaste et forsøk på å løse et problem, for så å ta fatt på nytt.

Læreren skal på forhånd ha tenkt ut ulike måter elevene kan komme til å angripe problemet på, og hvilke metoder det er viktig å løfte fram i klassediskusjoner, slik at det faglige målet for timen blir nådd. Da vil hun kunne stimulere elevene til utholdenhet og gi dem gode innspill slik at de kan strekke seg og utnytte sitt læringspotensial.

Elevenes engasjement bør stimuleres og opprettholdes ved hjelp av lærerens kloke og timede bruk av hint og utvidelser. (Liljedahl, 2016)

Elevene skal få streve og gjøre feil, men hvis de viser tegn til å ville gi opp, må læreren komme inn med gode og gjennomtenkte innspill som får elevene til å tenke videre og gå på med ny iver og tro på seg selv. Læreren skal ha tenkt ut hvordan oppgaven kan forenkles og utvides etter elevenes ulike behov og forutsetninger.

Gjennom å lede samtalen på en god måte (Wæge, 2015) kan læreren få elevene interessert i hverandres ideer og sammen med elevene føre samtalen mot det matematiske målet for økta.

I eksempelet som følger, har jeg observert elever i en 1P-klasse på en videregående skole. Elevene ble delt i tilfeldige grupper ved hjelp av korttrekking. På forhånd hadde lærerne satt sammen gruppebord og dekket dem med en duk av tykt papir som alle medlemmene i gruppa skulle skrive på. Det er et viktig poeng at oppgaven skal presenteres muntlig for elevene, slik at de hører godt etter og kan stille spørsmål både umiddelbart og underveis hvis det er noe som er uklart.

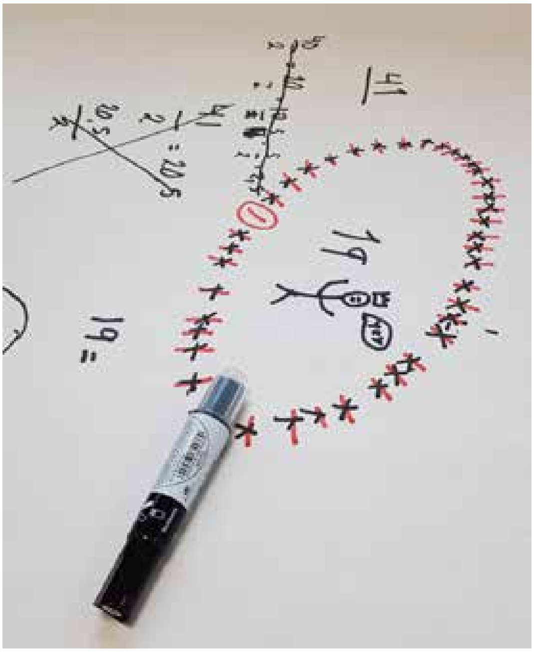
Ingvill Merete Stedøy
Matematikksenteret
ingvill.m.stedoy@matematikksenteret.no

Jeg har tatt bilder av elevenes arbeider, diskutert med dem underveis i løsingsprosessen, og observert hvordan de jobbet gjennom økta. Med dette som utgangspunkt har jeg analysert elevenes arbeid med oppgaven.

Josephus' problem

Problemet har fått navn etter en jødisk historiker, Flavius Josephus, som levde i det første århundret etter Kristus. Historien er fortalt av Josephus selv i «The Jewish War».[1] Etter dette har det dukket opp mange varianter av problemet, og det har blitt løst i matematikkmiljøer verden rundt. Våre elever fikk presentert følgende versjon, som ble gitt til elevene muntlig:

> I denne matematikktimen skal vi tilbake til det første århundret etter Kristus. Da var Flavius Josephus fanget av romerske soldater i en hule sammen med 40 andre jødiske soldater. I stedet for å overgi seg og bli drept av romerne ville jødene heller ta livet av hverandre. Josephus ba alle trekke en lapp med et tall mellom 1 og 41 og stille seg i en ring etter nummer. Alle skulle stille seg i en sirkel og plassere seg etter hvilket nummer de trakk. Selv hadde Josephus trukket lapp på forhånd.
>
> Så skulle annenhver mann drepe hverandre, helt til bare én sto igjen til slutt. Han skulle begå selvmord. Hvem som skulle stå igjen til slutt, var lagt i Guds hender, siden de trakk nummer tilfeldig.
>
> Det startet med at nummer 1 hogg hodet av nummer 2, nummer tre hogg hodet av nummer 4, og så videre, runde etter runde, helt til én mann sto igjen. Josephus var en smart mann, så han hadde sørget for å få det tallet som han visste ville bli igjen til slutt. Da alle var døde, unntatt Josephus, overga han seg til romerne. De viste ham nåde, og han levde lykkelig til han ble en gammel mann og døde, mett av dage.



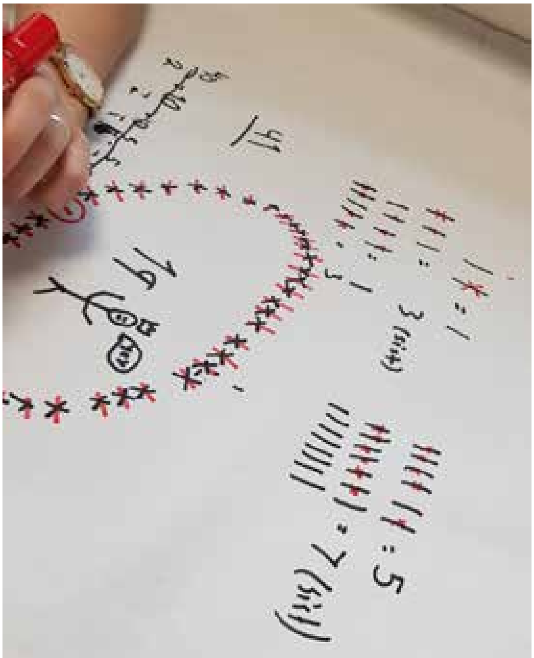
Figur 1

> På hvilken plass i ringen sto Josephus? Hvordan kunne han enkelt beregne hvor han måtte stå?

Jeg var deltagende observatør i to 1P-grupper. I begge klassene satt elevene gruppevis ved store bord, og med hele bordet dekket av hvitt papir som de skulle skrive på. Dette ble gjort bevisst for å se om det var forskjell på aktiviteten hvis elevene satt ved bord, i forhold til om de sto ved vertikale tavler. Elevene ble delt inn i tilfeldige grupper med tre elever i hver.

På alle gruppene startet elevene med å skrive opp tallene fra 1 til 41, og de fleste arrangerte dem i en sirkel. Så fulgte de prosedyren som var beskrevet i oppgaven. Alle elevene forsto dette, og alle unntatt de som hadde oversett ett eller flere tall i prosessen, kom fram til at Josephus sto på plass nummer 19. Dette viser at oppgaven har lav inngangsterskel og fungerer godt med hensyn til at alle elevene kommer i gang.

Dette var egentlig bare oppvarming til selve utforskningen. For nå fikk elevene vite:



Figur 2

Josephus regnet raskt ut hvor han skulle stå, og han hadde klart å regne det ut uansett hvor mange menn som sto i ringen. Hvordan kunne Josephus klare det?

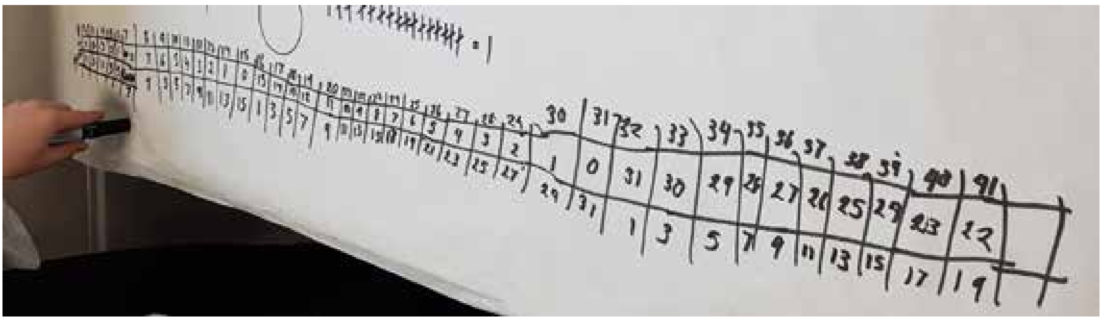
På denne delen av oppgaven hadde gruppene ulike tilnærminger. Noen grupper kom helt fram til en formel, andre hadde funnet et mønster og kunne forklare med ord, mens andre igjen var på vei mot løsninger. Jeg gjengir hvordan gruppene presenterte hvordan de har jobbet, og hva de har funnet ut. Det er presentert i den rekkefølgen læreren og jeg bestemte hvordan det skulle presenteres.

På figur 2 kan vi se hvordan den samme gruppa som har løst oppgaven på figur 1, har begynt å utforske hvem som står igjen til slutt hvis det er 2, 3, 4, 5, 6 og 7 menn i ringen. De har notert at hvis det er 3 eller 7 i ringen, så vil den som har det siste (høyeste) tallet, stå igjen til slutt.

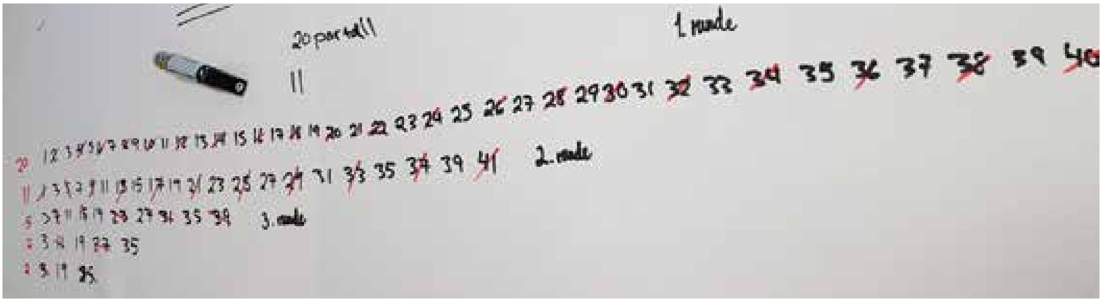
De bestemmer seg for å sette opp en tabell (figur 3). Men selv med tabellen er det litt vanskelig å finne en rask metode for å beregne hvem som overlever. Tabellen viser hvem som overlever fra og med 2 i ringen, til og med 41 i ringen. Tabellen på figur 3 viser at den overlevende er henholdsvis nummer

1 – 3 –
1 – 3 – 5 – 7 –
1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 15 –
1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 15 – 17 – 19 – 21 – 23 – 25 – 27 – 29 – 31 –
1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 15 – 17 – 19

Det siste tallet, nummer 19, er den som overlever når det er 41 menn i ringen. Denne gruppa finner ikke en rask måte å regne det ut på, men vi ser de er veldig nær. Den midterste raden viser differansen mellom antall i ringen og nummeret til den siste som overlever. Dette er noe de har tatt med i håp om å finne et mønster som kan hjelpe dem. De ser også at det er



Figur 3



Figur 4

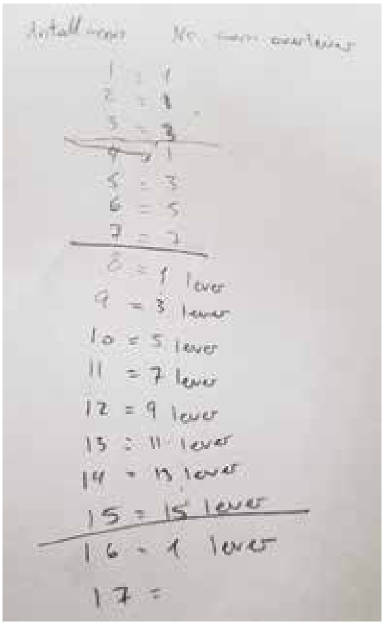
et visst antall oddetall mellom hver gang det er nummer 1 som overlever, men de klarer ikke å finne eller formulere en regel.

Disse elevene viser at de kan systematisere og lete etter mønster. De har gode strategier, som å prøve et enklere problem som likner, og dokumentere sine funn ved hjelp av en tabell. De er utholdende og villige til å prøve ulike metoder. De ser en sammenheng i tabellen, mellom antall menn i ringen og hvem som overlever. De kommer imidlertid ikke fram til hvordan denne sammenhengen kan uttrykkes matematisk. De finner verken en algoritme eller en forklaring. Dermed kan de heller ikke sette opp en hypotese.

Den neste gruppa jeg vil kommentere, figur 4, er ei gruppe som har skrevet opp hvilke tall som er igjen for hver runde i ringen. De konstaterer at i første runde blir alle 20 partallene drept, i andre runde dør hvert annet oddetall. Så er det differanse 8 mellom oddetallene som dør, neste runde er differansen 16, og til slutt differanse 32. Gruppa ser at toerpotenser spiller en rolle her, men de kommer ikke videre i denne tenkningen. Når de får et hint om å se hvem som overlever hvis det er akkurat 2, 4, 8 og 32 i ringen, oppdager de at da vil alltid nummer 1 overleve. De strever med å finne en god forklaring på dette, og ser ikke hvordan de kan bruke det til å finne en metode for å beregne den overlevende, uansett hvor mange som er i ringen. De må søke hjelp fra andre grupper.

Gruppa på figur 5 ser at det er noe spesielt med differansen mellom de som dør i hver runde. De sier at det «dobler seg for hver runde».

Figur 5



Figur 6

De er i gang med å undersøke hva som skjer når det er færre menn i ringen. De viser at de kan ta i bruk strategien som går ut på å forenkle problemet.

Gruppa på figur 6 har laget et skjema med antall menn i ringen i første kolonne, og hvem som overlever i andre kolonne. De har markert med en linje hver gang tallfølgen starter på 1 igjen. Da jeg spurte dem: «Hvorfor går det ikke videre til 17 etter nummer 15?», så svarte de: «Det går ikke, for da er det jo bare 16 menn i ringen, så det begynner på 1 igjen!» Men de hadde ingen videre forklaring.

Den endelige forklaringen får vi på de to neste gruppene, figur 7 og figur 8. De fant først en måte å beregne på hvem som kom til å overleve. På arket ser vi at de har skrevet:

$$2^x - \text{antall mennesker i ringen} = 2^5 \rightarrow 41 = 9$$
$$9 + 10 = 19$$

Da jeg spurte dem hva de mente, og om de kunne beregne hvem som overlevde hvis det var 46 menn i ringen, skrev de:

$$2^5 \rightarrow 48 = 16$$
$$16 + 17 = 33$$

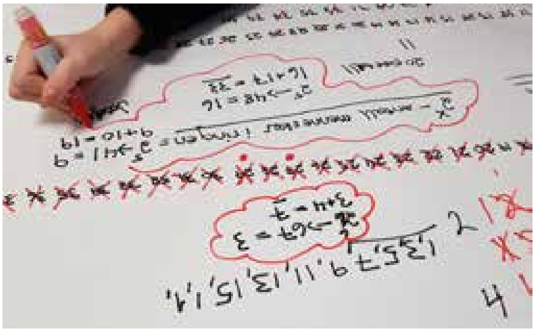
Og de forklarte: «Vi må finne det største tallet på formen 2^x som er mindre enn antallet i ringen. Så tar vi antall i ringen minus det tallet. Til slutt må vi ta svaret og legge til 1 større enn svaret.»

De hadde funnet algoritmen, men hadde en litt uhensiktsmessig notasjon, som bare de selv forsto.

Vi ser at de også har beregnet hvem som overlever hvis det er 67 menn i ringen:

$$2^5 \rightarrow 48 = 16$$
$$16 + 17 = 33$$

Den aller siste gruppa kunne både beskrive en algoritme og forklare hvorfor den blir riktig.



Figur 7

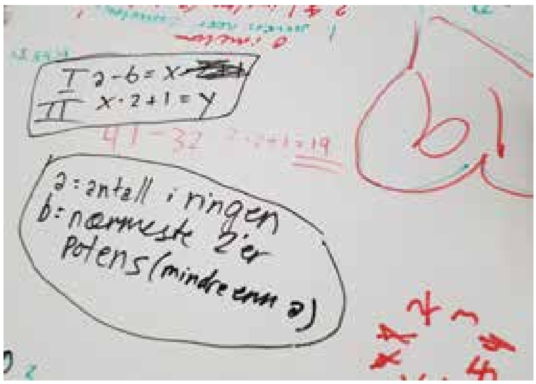
Figur 8

De har også en ganske bra notasjon. De skriver (figur 8 og figur 9):

a = antall i ringen
b = nærmeste toerpotens (mindre enn a)

I $\quad a - b = x$

II $\quad x \cdot 2 + 1 = y$



Figur 9

Denne gruppa hadde sett at når antallet i ringen er 2, 4, 8, 16, …, 2^n, så vil alltid nummer 1 overleve. Da jeg spurte om de kunne forklare hvorfor, klarte de å beskrive hvordan antallet i ringen kunne deles med 2 uansett hvilken runde de var på. Da ville tellinga på hver runde begynne på nummer 1, så han ville bli igjen til slutt. Hvis antallet i ringen var større enn en toerpotens, fant de ut at når det var drept så mange at de som var igjen, utgjorde en toerpotens, så ville den neste mannen etter det være nummer 1, og dermed overleve til slutt. Algoritmen de skrev, viste hvordan de kunne beregne hvor mange som måtte bli drept, før antallet som var igjen i ringen, var en toerpotens. Det var fantastisk å se hvor stolte de var når de hadde funnet ut dette, og ikke minst hvor stolte de var når de fikk lov, som siste gruppe, å forklare det for resten av klassen. Figur 8 viser utholdenhet og systematisering.

Oppsummering

Elevene viste stor iver og utholdenhet i arbeidet med oppgaven. De var villige til å prøve på nytt hvis den første ideen ikke førte fram, og de var stolte av sitt eget arbeid. Gjennom klassesamtalen etterpå fikk elevene forklare hvordan de hadde tenkt, og vurdere de ulike metodene opp mot hverandre. Det ble nevnt strategier som å lete etter mønster, å forenkle problemet, å prøve seg fram, å generalisere/finne en algoritme eller formel, å sette opp en tabell og å lage en figur/skisse. På denne måten har et prosessmål for timen blitt nådd, nemlig at elevene skal skaffe seg et sett av problemløsingsmetoder som de kan ta i bruk en annen gang. De som hadde kommet fram til at toerpotenser spiller en rolle for å finne en løsning på den generelle oppgaven, kunne trekke fram at kjennskap til tall og klassifisering av tall kan være nyttig i matematisk problemløsing. På denne måten fikk læreren fram et av de faglige målene for timen, nemlig at elevene skulle se hvordan potenser kan brukes i en matematisk modell for et konkret problem.

Læreren hadde et mål om å få elevene til å samarbeide godt i grupper og på tvers av grupper. Det var uten tvil godt samarbeid på gruppene. Tilfeldig gruppeinndeling gjorde at elevene ble oppmerksomme på kvaliteter hos hverandre som de kanskje ikke visste om fra før. Elevene viste også stor respekt for hverandres ideer.

Når det gjelder samarbeid på tvers av gruppene, var ikke det like tydelig. Der har vi sett at en annen organisering med elevene stående ved vertikale tavler gir langt bedre og naturlig samarbeid på tvers av grupper.

Dette er beskrevet i artikkelen «Arbeid som en matematiker» (Stedøy, 2019). Det er dessuten godt dokumentert og forsket på av Liljedahl (2016).

Note

1 Bok 3, kapittel 8, del 7

Referanser

Leinwand, S., Brahier, D. J., Huinker, D., Berry, R. Q., Dillon, F. L., Larson, M., Smith, M. S. (2014). *Principles to actions – Ensuring mathematical success for all*. Reston: NCTM.

Liljedahl, P. (2016). Building thinking classrooms: Conditions for problem solving. I P. Felmer, J. Kilpatrick & E. Pekhonen (red.), *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives* (s. 361–386). New York: Springer.

Stedøy, I. M. (2019). Arbeid som en matematiker. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 30*(4), 23–29.

Wæge, K. (2015). Samtaletrekk – redskap i matematiske diskusjoner. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 26*(2), 22–27.