Susanne Stengrundet

Nå skal vi repetere … !?

Etter sommerferien når elevene begynner på et nytt klassetrinn eller en ny skole, er ofte de første matematikktimene satt av til repetisjon. Når påsken nærmer seg, stresser lærerne for å bli ferdige med «pensum» for å ha nok tid til repetisjon.

Repetisjon legger med andre ord beslag på store deler av skoleåret. Legges denne tiden sammen, utgjør det mange uker i en elevs skolegang. Hva er det som er så viktig med repetisjon?

I starten av et skoleår vil mange lærere repetere det som elevene skal kunne for å ha et godt utgangspunkt for å gå videre. Det første kapittelet i mange lærebøker heter repetisjon og inneholder ofte en lang liste med emner som elevene har hatt i tidligere skoleår. Ser man nøye på innholdet, blir emnene ofte presentert som om det var nytt stoff. Elevene kan det ikke, derfor må vi gjennomgå det på nytt, er en uttalelse som høres ofte. Dave Hewitt (1996) mener at i slike sammenhenger vil de elevene som kan stoffet fra før av, kjede seg, og de elevene som ikke kan det, vil sannsynligvis ikke forstå stoffet noe bedre etter

Susanne Stengrundet
Matematikksenteret
susanne.stengrundet@matematikksenteret.no

Artikkelen er basert på forfatterens verksted, Novemberkonferansen 2014.

«Til topps» med fem terninger:

- Kast fem terninger én gang.
- Med utgangspunkt i disse fem tallene skal dere lage alle tall fra 1 til … så høyt opp som dere klarer.
- Dere kan bruke addisjon, subtraksjon, multiplikasjon, divisjon og parenteser.
- Dere kan bruke én, to, tre, fire eller alle fem terninger.
- Alle regnestykker må skrives opp på arket.

en ny gjennomgang.

Einstein sa at man ikke kan løse problemer med det samme tankesettet som skapte problemet. En ny gjennomgang vil altså ikke hjelpe til forståelsen. Det finnes imidlertid måter å repetere på som gir elevene langt større utbytte.Når jeg overtar en ny klasse, starter jeg alltid med å spille «Til topps» med fem terninger.

Elevene er engasjerte og regner. I spillet repeteres de fire grunnoperasjonene, parenteser og regnerekkefølgen. Til tross for dette brede faglige innholdet jobber elevene bra. Alle vil komme høyest. De prøver derfor å sette sammen de ulike verdiene på terningene sine, og velger en eller flere grunnoperasjoner slik at regnestykket gir det neste tallet. Fokuset blir ikke på repetisjon av grunnleggende regning. Gangetabell, parentesregler og bruk av regnerekkefølge blir bare et middel for å nå målet.

Denne formen for repetisjon vil jeg si har en mye større effekt enn å regne 100 etterfølgende regnestykker i en bok. I og med at elevene noterer regnestykkene på ark, ser læreren om elevene har forstått regnerekkefølgen. Står det på et ark at $4 + 5 \cdot 3 = 27$, kan læreren påpeke at hun får svaret 19. Da pleier elevene å være kjappe til å forklare at $4 + 5 = 9$ og at 9 ganger 3 blir 27. Dette skaper en god diskusjon om parenteser og regnerekkefølgen. Gjennom spillet trener elevene tallforståelsen. Det at elevene selv må vurdere hvilke regneoperasjoner det er smart å bruke for å få det ønskede tallet, gjør at de trenes i å bli fleksible i tallbehandling. I dokumentet for god regning står det at elevene skal kunne utføre prosedyrer effektivt, nøyaktig og fleksibelt. Når elevene spiller «Til topps», øver de på nettopp dette.

Dette fikk jeg bekreftet for noen år siden. Elevene, som kjente spillet godt, satt fordypet i oppgaven da en jente plutselig reiste seg og ropte høyt: «Hvorfor kan jeg det egentlig? Jeg som ikke kan gangetabellen?» Jenta, som gikk på vg1, hadde IOP i matematikk. I og med at det i denne aktiviteten ikke ble lagt vekt på å løse oppsatte regnestykker, glemte hun vanskelighetene sine. Det viste at hun hadde tilegnet seg noen grunnleggende kunnskaper i løpet av årene med matematikkundervisning. På grunn av alle nedturene gjennom skoletida klarte hun antageligvis ikke å vise hva hun kunne, ved å løse tradisjonelle oppgaver.

Jeg spiller aldri «Til topps» kortere enn tolv minutter. Dette kommer av at elevene først er nødt til å bruke kunnskaper om multiplikasjon og parenteser når tallene de skal prøve å lage, blir store. Når tallene blir større, vil elevene kanskje oppdage mønster som de kan ha god nytte av. Å oppdage mønster er dessuten en egenskap som de kan ha bruk for senere.

Eksempel: Tallene som terningene viser, er 1, 2, 4, 4 og 5, og elevene har kommet til tallet 20. Da kan videre regning se ut som i boksen i neste spalte.

$$20 = 4 \cdot 5$$
$$21 = 4 \cdot 5 + 1$$
$$22 = 4 \cdot 5 + 2$$
$$23 = 4 \cdot 5 + 4 - 1$$
$$24 = 4 \cdot 5 + 4$$
$$25 = 4 \cdot 5 + 4 + 1$$
$$26 = 4 \cdot 5 + 4 + 2$$
$$27 = 4 \cdot 5 + 4 + 2 + 1$$
$$28 = (5 + 2) \cdot 4$$
$$29 = (5 + 2) \cdot 4 + 1$$

Etter 27 må elevene finne en annen måte å sette sammen tallene på, da alle tallene er brukt. Vi ser at 27 også kan lages mye enklere ved å bruke regnestykket fra tallet 28 og trekke fra 1. Det er først etter noen gjennomganger at elevene begynner å tenke på subtraksjon når de skal finne et større tall. Ofte starter det med at de hopper over et tall som de ikke finner et regnestykke til. Først etter å ha laget det større tallet, finner de det lavere tallet. Et annet viktig moment er oppdagelsen av at man kan lage ettallet ved å dele to like tall. Hvis ikke alle elevene oppdager dette, kan elever som bruker dette, forklare.

Hewitt (1996) sier at barn ikke blir gode til å gå fordi de legger vekt på å øve på å gå, men fordi de vil videre. Med andre ord: Elever blir ikke gode i grunnleggende tallbehandling ved å gjøre mange oppgaver, men de blir gode hvis de bruker grunnleggende regning til å klare å løse andre oppgaver.

God repetisjon er ikke en ny gjennomgang, men å se stoffet i en ny sammenheng.

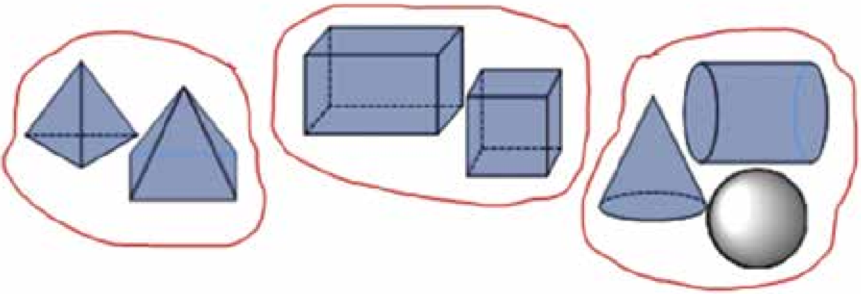
Anders Isnes, tidligere leder av Naturfagsenteret, har sagt dette, og jeg synes vi skal ha denne setningen i bakhodet når vi tenker på repetisjon. Jeg vil gi noen eksempel hentet fra geometri. Helt fra første klasse skal elevene bli kjent med egenskaper ved geometriske figurer. Likevel presenteres figurene som om de var nye, selv på videregående nivå. Man tar altså ikke hensyn til elevenes forkunnskaper, og elevene får bekreftet at de ikke behøver å lære noe, for det kommer jo på nytt.

En god repetisjon tar hensyn til forkunnskaper. Mange elever på ungdomstrinnet og videregående skole tenker ikke over at et kvadrat har egenskapene til både et rektangel og et parallellogram. Da vet elevene heller ikke at et kvadrat både er et trapes og en rombe, og de må derfor lære seg mange formler.

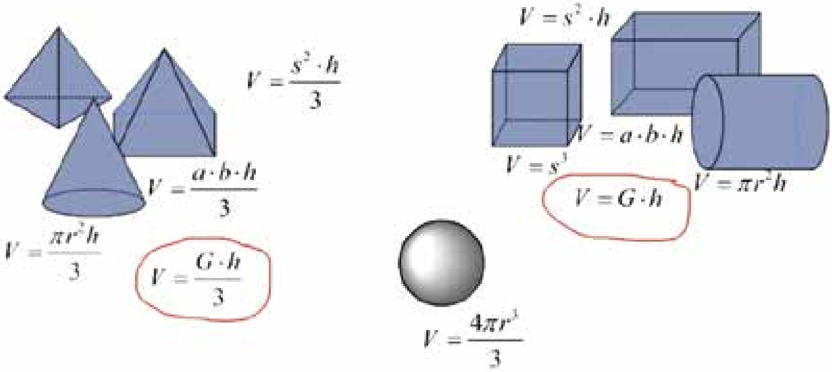
Hvis man tar kunnskapene til eleven på alvor, blir det mye lettere. Vi kan vise dem et utvalg av geometriske figurer som de skal sortere (figur 1).

Min erfaring sier at elevene har lett for å sortere slik at alle figurer med sirkler kommer i samme gruppe. Elevene ser på oppbyggingen av figuren istedenfor figuren som helhet. I et neste skritt ber jeg elevene om å tilordne formler til figurene. Jeg passer på at antall figurer og formler ikke stemmer overens. Dermed legger jeg til rette for at elevene oppdager sammenhenger. For mange elever er det en helt ny oppdagelse at én og samme figur kan ha to forskjellige formler for volum. For eksempel kan man enten bruke formelen $V = s^3$, $V = a \cdot b \cdot c$ eller $V = G \cdot h$ for å finne volumet til en kube.

Når man ser på helheten i figurene, kan man sortere enkle tredimensjonale geometriske figurerer i to grupper. Figurer med samme grunnareal og toppareal passer til formlene $V = G \cdot h$, mens figurer med spiss har formelen $V = G \cdot h/3$ (figur 2). Da blir gruppen med sirkler ikke lenger en egen gruppe, men passer enten til figurer med spiss eller figurer uten. Når det er så enkelt, hvorfor skal de da lære mange formler for volum? Det hender at vi får en spennende



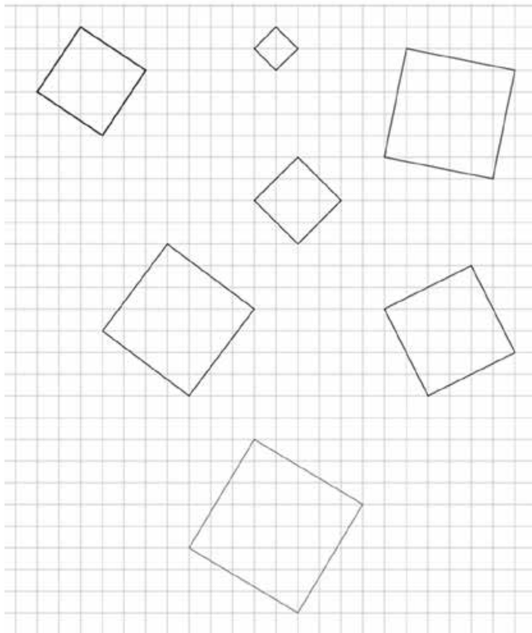
Figur 1



Figur 2

diskusjon i klassen når vi ser på volumformelen for kula. Hvor er spissen?

Hewitt (1996) poengterer at når vi repeterer slik at elevene skal huske til neste gang, så blir det like fort glemt igjen. Men i den korte perioden elevene husker, blir læreren belønnet fordi elevene gjør som han sier. Jeg mener at det er akkurat denne typen læring som står sentralt i mange lærebøker. Vi gjennomgår som om elevene aldri hadde hørt noe om emnet, som om emnet stod helt for seg selv uten sammenheng med andre deler av lærestoffet, og avslutter med en kapittelprøve, ofte med godt resultat. Til våren er alt glemt, og vi må repetere for at kunnskapen skal sitte til eksamen. Målet med undervisningen skal ikke være å lære til neste prøve, men å hjelpe elevene til å se mønster og sammenhenger slik at de har et grunnlag for å komme videre.



Figur 3

Det er ikke gjentagelse som fører til kunnskap, men refleksjon.

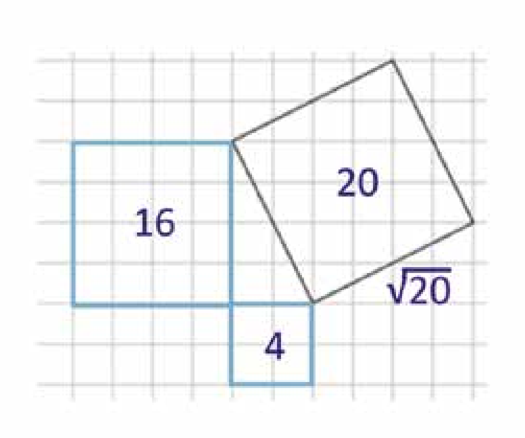
I vg1 vil de fleste elever huske formelen for Pytagoras' setning. De husker gjerne ord som katet og hypotenus og vet at Pytagoras' setning bare kan brukes i rettvinklete trekanter. Mange elever er veldig trygge på beregningen av den manglende siden i trekanten, uavhengig av om det er en katet eller hypotenus de skal finne. Men kan vi stole på at elevene har skjønt hva som egentlig står i setningen? Spør jeg elevene mine hva betydningen av Pytagoras' setning er, får jeg svar som: hypotenus^2 = katet^2 + katet^2. Spør jeg videre, følger svarene:

$$\text{hyp}^2 = \text{kat}^2 + \text{kat}^2 \quad \text{eller} \quad c^2 = a^2 + b^2.$$

Med andre ord får jeg det samme svaret tre ganger, et svar som er en gjentagelse av definisjonen, mens jeg er interessert i at elevene skal se at et tall opphøyd i andre kan fremstilles geometrisk som et kvadrat. Leuders (2012) mener at elevene får en sårbar kunnskap hvis repetisjon begrenser seg til å repetere og trene fremgangsmåter. Han mener det er viktig at repetisjon setter lærestoffet i en sammenheng, slik at konseptet ikke blir glemt. Forstår elevene konseptet, kan de opparbeide seg kunnskapen på nytt dersom de glemmer fremgangsmåten. I tillegg er det konseptet som danner utgangspunktet til videre læring, ikke algoritmen. For å trene opp en bedre forståelse av Pytagoras' setning hjelper det dermed ikke å gi elevene mange oppgaver med oppstilte rettvinklete trekanter. Jeg pleier i denne sammenhengen å dele ut et ark med mange kvadrater til elevene (figur 3). Oppgaven er å finne nøyaktig sidelengde til kvadratene uten å bruke linjal eller kalkulator.

Løsningen er å tegne en rettvinklet trekant slik at siden i kvadratet danner hypotenusen i trekanten (figur 4). Da kan man finne sidelengden ved hjelp av definisjonen i Pytagoras' setning.

Lengden til katene av trekanten som er tegnet over siden til kvadratet, er 2 og 4. Det betyr at arealet til kvadratet er $4 + 16 = 20$. Siden til kvadratet blir dermed $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Jeg mener at når elevene arbeider på denne måten, må de ha kunnskap om Pytagoras' setning utover å



Figur 4

ramse opp formelen. Setningen blir ikke i fokus, men fungerer mer som et redskap. Anvendelsen og resonnementet fører etter min mening til en bedre forståelse hos elevene. Eksempelet Pytagoras viser at det er forskjell på å kunne beregne sider med algoritmen Pytagoras' setning og å forstå konseptet Pytagoras.

Det er refleksjon som forbedrer forståelsen, ikke repetisjon.

Hvordan kan det skapes bedre forståelse av begrepet kvadrattall? Et tips er å skrive noen store kvadrattall på tavla. Be elevene om å trekke ut rota uten å bruke kalkulator. Spør etter strategier.

Eksempel: $\sqrt{2304}$

Elevens resonnement:

– Tallet må ligge mellom 40 og 50 fordi:

$$40^2 = 1600 \quad \text{og} \quad 50^2 = 2500$$

– Det siste tallet er 4, da får man to muligheter: 42 og 48.
– Det riktige svaret er 48 fordi 2304 ligger nærmere 2500 enn 1600.

Mange elever liker slike utforskende oppgaver. De blir utfordret i tallforståelse. Jeg har erfart at høyt presterende elever på videregående skole klarte å finne rota til tall opp til 200^2 ved resonnering. Dermed viste de god forståelse av kvadrattall opp til 20.

Ren repetisjon forbedrer ikke forståelsen, det er det refleksjon som gjør. Hewitt (1996) skriver at all tid man bruker på å forklare noe som er blitt forklart en gang før, er bortkastet. Han mener at repetisjon i form av ren gjentagelse tjener til å holde elevene på samme nivå. Det mener han står i sterk kontrast til alt vi lærer i hverdagslivet. Som eksempel skriver han at unger som lærer å krabbe, ikke vil nøye seg med å krabbe på flatt golv. De vil videre, de vil krabbe over hinder, opp trappa og helst opp veggen også. Repetisjon sammenligner han med å gi unger et flatt golv å bevege seg på. Det er kjedelig, og ungene mister lysten til å krabbe. På samme måte vil elever som bare blir utfordret med samme type oppgaver, gå lei av matematikk. Det finnes mange lærebøker som er tilpasset svake elever. Disse lærebøkene er strippet for anvendelser og konsentrerer seg om prosedyrer. Leuders (2012) mener at det er feil å tenke at prosedyrer kommer før anvendelser, og sier at det er spesielt viktig for svake elever at de får jobbe med anvendelser. Også disse elevene trenger utfordringer, ikke bare gjentagelser, for å komme videre. Problemløsningsoppgaver er egnet når elevene skal trene på prosedyrer, fordi prosedyrene ikke er i fokus. Det er det andre overordnete strukturer som er. I eksempelet «Til topps» er det det å finne det neste tallet som styrer aktiviteten. En god problemløsningsoppgave vil i tillegg være selvdifferensierende. Det betyr at elevene kan finne utfordringer på eget nivå.

Noe av det vanskeligste ved å legge til rette for god repetisjon er å strukturere lærestoffet i en type hierarki. Ikke alt som står i læreplanen eller matematikkboken, er like viktig. Det finnes noen begreper som er sentrale, for eksempel de fire regneartene, prosentregning, proporsjonalitet og funksjoner. Ved å konsentrere repetisjonen om disse viktige begrepene, vil andre deler

(fortsettes side 21)

(fortsatt fra side 12)

bli øvd på samtidig. For eksempel vil en god repetisjon av prosentregning samtidig repetere begrepene desimaltall og brøk.

Hewitt forklarer det med sin egen opplevelse da han skulle lære å seile: Roret, repet og kroppens posisjon måtte passes på. Det ble altfor mye å tenke på samtidig. Da instruktøren sa at han bare skulle passe på at seilet var stramt, gikk resten av seg selv. Hewitt sier at roret, repet og kroppens posisjon er underordnet overbegrepet «seil». Det gikk bra så snart han klarte å konsentrere seg om den delen som styrte de andre delene. Det samme kan sies om matematikkundervisning. Klarer vi å finne kjernen i noe som skal læres, behøver vi ikke å repetere enkeltdelene. Disse vil falle på plass av seg selv. Hvis elevene har en god forståelse av proporsjonalitet, trenger vi ikke å repetere målestokk, mengdeberegninger, formlike trekanter m.m., men kan konsentrere oss om begrepet «proporsjonalitet» og «omvendt proporsjonalitet». For å finne volum trenger vi et grunnareal og en høyde. Ofte må man beregne grunnarealet for å komme videre. Dermed repeterer man grunnarealet og beregningen av todimensjonale figurer uten først å ha repetert «areal og omkrets». Andre ganger må man finne høyden ved bruk at Pytagoras' setning. Da blir den repetert gjennom bruk og ikke som et eget tema.

Jeg mener at repetisjon bør være noe annet enn en ny gjennomgang av lærestoffet. Som tidligere nevnt vil en ny gjennomgang bare kjede elever som har forstått stoffet ved første gjennomgang, og samtidig gjøre elever som ikke har forstått det, enda mer negative. God repetisjon betyr å bruke det man har lært, i nye sammenhenger. Vi kan repetere med spill eller problemløsningsoppgaver. Hovedsaken er at repetisjon hjelper til å forstå og reflektere over sammenhenger og mønster.