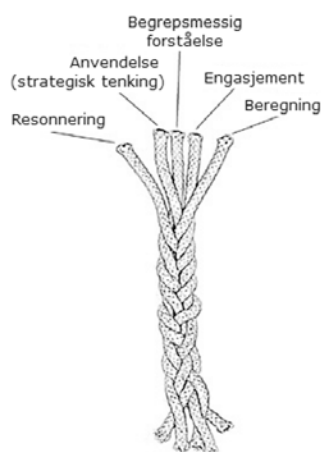


Anita Valenta

Tallforståelse – begrepsmessig forståelse

Utvikling av tallforståelse framheves i mange studier som svært viktig for elevers matematikk-læring, men det er ikke åpenbart hva tallforståelse innebærer. Case (1998, s. 1) skriver at “Number sense is difficult to define but easy to recognize”, og fremhever betydning av fleksibilitet i arbeidet med tall og regneoperasjoner, bruk av ulike representasjoner, utvikling av hensiktsmessige strategier, overslagsregning, identifisering og bruk av ulike mønster, resonnering om egenskaper av tall og operasjoner. McIntosh, Reys og Reys (1992) understreker i tillegg et emosjonelt aspekt i sin beskrivelse av tallforståelse. Deres definisjon består av tre hovedelementer: 1) generell forståelse av tall og operasjoner, 2) bruk av slik forståelse i matematisk resonnering og utvikling av hensiktsmessige strategier i arbeid med tall og regneoperasjoner og 3) lyst til å gå inn i matematiske problemstillinger og bruke forståelsen i arbeid med tall.

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskriver matematisk kompetanse som sammensatt av fem komponenter: begrepsmessig forståelse,



beregning, anvendelse (strategisk tenking), resonnering og engasjement. Disse fem komponentene ses tett sammenflettet og er avhengige av hverandre. Komponentene støtter hverandre, og det er viktig at elever får mulighet til å utvikle alle fem komponentene samtidig. Forbindelsen mellom komponentene blir da forsterket og elevene kan utvikle en matematisk kompetanse som er varig, fleksibel, nyttig og relevant. De fem komponentene finner vi igjen i beskrivelsen av tallforståelse fra Case og McIntosh m.fl, og denne definisjonen av matematisk kompetanse kan ses som et mulig utgangspunkt for nærmere drøfting av tallforståelse.

I en serie på fire artikler i Tangenten (ett for hvert nummer i 2016) vil ulike aspekter ved

Anita Valenta

Matematikksenteret

anita.valenta@matematikksenteret.no

Artikkelen er del 1 i en serie på fire artikler.

tallforståelse på mellomtrinnet knyttet til hver av de fem komponentene av matematisk kompetanse bli presentert og drøftet. Aspektene er basert på gjennomgang av forskning og utviklingsarbeid knyttet til matematikkdiraktiske prosjekt om arbeid med tall på mellomtrinnet. Artiklene vil vise hvordan tallforståelse kan komme til uttrykk i undervisning, dette blir eksemplifisert gjennom episoder fra 4-7.trinn.

De ulike aspektene går delvis inn i hverandre og det er ikke lett å trekke grenser mellom dem. Målet med å beskrive tallforståelse i form av noen aspekter er ikke å isolere de ulike elementene, men heller fremheve viktige elementer av tallforståelse, gi eksempler på hva de kan gå ut på og hvordan de kan arbeides med i praksis. En matematikkoppgave omhandler gjerne flere aspekter *på tvers av de fem komponentene*. For å legge til rette for utvikling av tallforståelse kan det være viktig at lærere velger hvilke aspekter de ønsker å fremheve under arbeidet med en gitt oppgave, samtidig som de er bevisste på at det bør arbeides med alle aspektene over tid.

Denne artikkelen handler om begrepsmessig forståelse.

Begrepsmessig forståelse

innebærer å bygge opp begrepsmessige strukturer og se sammenhenger mellom ulike begreper, ideer og prosedyrer. Det handler også om å tolke og benytte ulike representasjoner, oversette og veksle mellom ulike representasjoner ut fra hva som kan være nyttig for et gitt formål. Innenfor tallforståelse kan denne komponenten ses som bestående av følgende aspekter:

Ulike måter å representere tall på og overganger mellom representasjoner består i å representere positive og negative hele tall, brøk og desimaltall symbolsk, på tallinje, med ulike illustrasjoner/tegninger, konkreter og regnefortellinger. Det å kunne tolke de ulike representasjonene og veksle mellom dem er av stor betydning for utvikling av tallforståelse (se for eksempel Fosnot & Dolk, 2001; Lamon, 2006; Saxe, Diakow, & Gearhart, 2012). Figur 1 viser eksempler.

Ulike egenskaper ved tall består i å kjenne til og kunne beskrive egenskaper ved tall, identifisere tall som har egenskapene, beskrive strukturer og representere dem på ulike måter (se for eksempel Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Markovits & Sowder, 1994). Figur 2 viser eksempler.

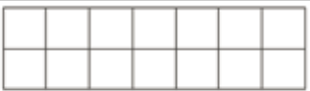
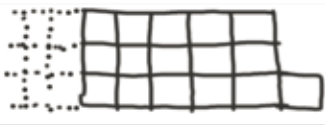
Relasjoner mellom tall består i å kjenne til og kunne beskrive ulike relasjoner mellom tall, gjenkjenne relasjonene og representere dem på ulike måter (se for eksempel: Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Markovits & Sowder, 1994; Parrish, 2010). Figur 3 viser eksempler.

Relasjoner som bygger på posisjonssystemet består i å kjenne til og kunne beskrive ulike relasjoner mellom tall som kommer av posisjonssystemet, fleksibilitet i overgang mellom symboler (tallene skrevet i 10-tallssystemet) og tallverdien (se for eksempel Anghileri, 2006; Fosnot & Dolk, 2001). Figur 4 viser eksempler.

Ulike måter å representere regneoperasjoner på og overganger mellom representasjonene innebærer å kunne representere regneoperasjoner symbolsk, med konkreter og tegninger,

Representere tallet seks som • en mengde på 6 objekter (som kan være delt opp på ulike måter) • kvantifisering av en fysisk størrelse (som f.eks. en lengde på 6) • et tall på tallinja som står i relasjon til andre tall (er f.eks. større enn 5 og mindre enn 6,2) • symbolet "6" • summen av 1 og 5, produktet av 2 og 3, osv	Representere tallet tre fjerdedeler som • som et tall på tallinja • som tallet vi får når vi regner ut $3 : 4$ • symbolet $\frac{3}{4}$ Gjennom ulike situasjoner som f.eks. • 3 hele skal deles på 4 personer • en person får tre firedeler av en mengde
--	--

Figur 1

Partall er - tall som er delelig med 2 - er på formen $2 \cdot n$ der n er et naturlig tall - et antall klosser som gir to like lange tårn	
14 er et produkt av tallene 2 og 7. Det betyr at vi kan representere 14 som $2 \cdot 7$ - som antall ruter i et rutenett med 2 rader og 7 ruter i hver rad - som antall drops i to poser med 7 drops i hver pose.	
Et tall som har rest 1 når det divideres med 3 kan representeres som $3 \cdot n + 1$ der n er et helt tall - et antall drops som kan fordeles på 3 poser slik at det er like mye i hver og så er det ett drops til overs - som antall klosser i tre tårn der det ene har en kloss mer enn de to andre	

Figur 2

Større enn og mindre enn, som at - et tall er 5 større enn et annet, differansen mellom dem er 5 - et tall er 3 ganger større enn et annet tall - sammenligning av et gitt tall med noen "referansetall" som 10, 100, 25, 1, $1/2$, osv., avhengig av tallet og situasjonen	Tall som har samme struktur 29 og 139 er begge på formen $10 \cdot n - 1$ - tall med 5 som faktor kan skrives på formen $5 \cdot n$ og representeres også som f.eks. antall drops når det er 5 poser med samme antall drops i hver pose
--	--

Figur 3

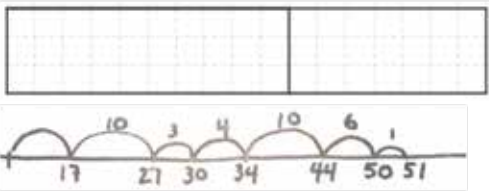
Se på 123 som	Se på 0,7 som		Se på 1,2 som				
• 1 hundrer, 2 tiere og 3 enere • 12 tiere og 3 enere • 11 tiere og 13 enere • ...	• 10 ganger mindre enn 7 • 10 ganger større enn 0,07 • 7 tideler • ...		• 100-delen av 120 • 10 ganger større enn 0,12 • ...				
57 drops	10-pakke	0	1	2	3	4	5
	enkel	57	47	37	27	17	7

Figur 4

på ei tallinje og gjennom regnefortellinger. Det innebærer også å kunne tolke representasjonene og skifte mellom dem (se for eksempel Barmby, Harries, Higgins & Suggate, Selter, 2009; Prediger, Nuhrenborger, & Husmann, 2012). Figur 5 viser eksempler.

Grunnleggende egenskaper ved regneoperasjoner handler om kjennskap til den kommu-

tative, assosiative og distributive egenskapen ved regneoperasjoner, kunnskap om motsatte regneoperasjoner og identitetslementer (se for eksempel: Carpenter, Franke, & Levi, 2003; Russell, Schifter, & Bastable, 2011). Det innebærer å kunne uttrykke egenskapene på ulike måter og se sammenhenger mellom dem. Figur 6 viser eksempler.

Kjenne igjen regneoperasjoner i ulike typer regnefortellinger fra hverdagen og beskrive konteksten symbolsk.	23 elever skal deles i firer-grupper $23 : 4 = 5$, rest 3 Fem grupper med fire og ei gruppe med 3
Kunne presentere et gitt regnestykke i form av en regnefortelling eller en illustrasjon, for eksempel representere - et subtraksjonsstykke som en differanse på ei tallinje - et multiplikasjonsstykke som antall ruter i et rutenett eller som "hopp" på tallinjen ($3 \cdot 17$)	
Kjenne til ulike typer situasjoner som svarer til en gitt regneoperasjon, kunne forklare likheter og forskjeller mellom dem.	"ta bort" og "differanse" i subtraksjon - multiplikasjon som "like grupper", rutenett, areal av en rektangel, forstørring

Figur 5

Kommutativ egenskap ved multiplikasjon: $a \cdot b = b \cdot a$ (Tilsvarende egenskap ved addisjon) $2 \cdot 6$  $6 \cdot 2$ 	
Assosiativ egenskap ved addisjon $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Tilsvarende egenskap ved multiplikasjon) Når man skal legge sammen tre tall, som f.eks. 24, 11 og 9, så kan man legge sammen 11 og 9 først, så 24, eller man kan legge sammen 24 og 11 først, så 9. Det blir likt. $24 + (11 + 9) = (24 + 11) + 9$. Det kan man se ved å tenke seg for eksempel tre sjokolader som koster 24, 11, og 9 kroner og vi skal finne prisen tilsammen. Da spiller det ingen rolle hvilke to priser vi starter med å addere før vi legger den siste, prisen blir den samme til slutt.	
Den distributive egenskapen: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $12 \cdot 4 = (10 + 2) \cdot 4$	
Addisjon og subtraksjon er motsatte operasjoner, at $(a + 5) - 5 = a$. Tilsvarende med multiplikasjon og divisjon: $(a : 7) \cdot 7 = a$.	
0 er det tallet som er slik at $a + 0 = a$ for alle tall a , og tallet $-a$ er slik at $a + (-a) = 0$; Tilsvarende, 1 er det tallet som er slik at $a \cdot 1 = a$, og tallet $1/a$ er slik at $a \cdot 1/a = 1$.	

Figur 6

Eksempler fra undervisning

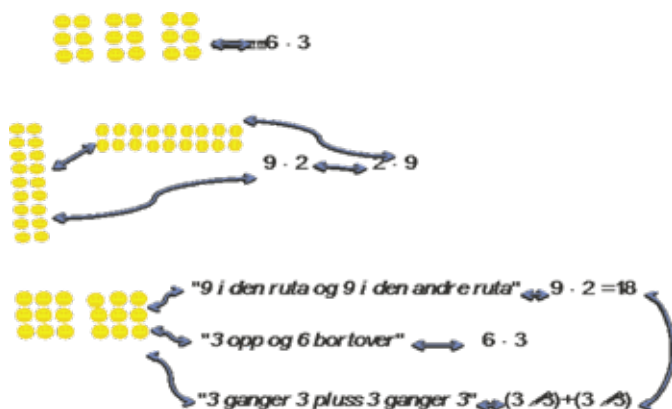
I analysen av det faglige innholdet i episodene fra praksis nedenfor¹ belyses spesielt aspektene knyttet begrepsmessig forståelse som kommer til uttrykk.

Tegne 18 prikker

En lærer på fjerde trinn deler ut ark til elevene og ber dem om å tegne 18 prikker på en måte som gjør det lett å se for andre at det er 18

uten å måtte telle dem (se figur 7). Tre av elevene presenterer sine tegninger på tavla. For hver tegning spør læreren de andre elevene hvordan eleven som har tegnet «kan ha sett tallet 18». Elevene kommer med ulike forslag muntlig, læreren skriver dem i form av symbolske uttrykk på tavla og ulike sammenhenger diskuteres.

Aspektet *ulike måter å representere tall på og overganger mellom representasjoner* kommer



Figur 7

tydelig frem i samtalen. Tallet 18 representeres i form av tegninger, muntlig og symbolsk som skissert nedenfor. De blå pilene viser koblinger mellom representasjoner som er gjort i samtalen.

Hver av tegningene knyttes til det tilhørende symbolske uttrykket, og sammenhengen mellom uttrykkene $9 \cdot 2$ og $(3 \cdot 3) + (3 \cdot 3)$ diskuteres også eksplisitt. Slike diskusjoner er egnet til å fremme utvikling av elevers forståelse i arbeid med tall, og senere algebra.

Oppgaven er utformet slik at elevene har behov for å benytte seg av *ulike egenskaper ved tall* i arbeidet med den. I den første tegningen bruker eleven at tallet 18 er et produkt av tallene 3 og 6. Når hun tegner seks prikker ser hun tallet 6 som et produkt av 2 og 3. Den andre eleven som presenterer sin tegning, tar utgangspunkt i at 18 er et produkt av 2 og 9. I den siste tegningen ses tallet 9 som et produkt av 3 og 3.

Episoden gir også et eksempel på arbeid med *ulike måter å representere regneoperasjoner og overganger mellom representasjonene*. I diskusjonen om den siste tegningen brukes addisjon til å beskrive en del-del-hel-situasjon. Den symboliseres ved $(3 \cdot 3) + (3 \cdot 3)$. Samme tegning beskrives også gjennom multiplikasjon sett som summen av like grupper: «9 i den ruta og 9 i den andre ruta», som da beskrives sym-

bolsk som $9 \cdot 2$. En annen elev ser multiplikasjon som antall ruter i et rutenett: «3 opp og 6 bortover», symbolsk: $6 \cdot 3$.

En av *grunnleggende egenskaper ved regneoperasjoner*, kommutativitet av multiplikasjonen, diskuteres også i episoden. En av elevene foreslår å tenke tallet 18 som « $9 \cdot 2$ eller $2 \cdot 9$ ». Han tegner den ene som et rutenett med ni rad og to kolonner, og den andre med to rad og ni kolonner. Læreren spør om forskjell mellom de to figurene og fremhever senere i samtalen kommutativiteten ved å

si at: «Ja, så her kan vi egentlig se at 2 ganger 9 og 9 ganger 2, er det samme. Det var en god måte å vise fram det på.»

Divisjon med desimaltall

I en klasse på sjuende trinn ber læreren elevene om å resonnerer seg frem til svaret på $249:0,7$ når de vet at $249:7 = 35,571$. Nedenfor er det et utdrag fra samtalen:

- Jakob: $249:7$ blir 35,571, mens du, når du tar 0,7 i stedet for 7, så tar du å ...
 Det er 10 ganger mindre enn 7. Null komma sju er 10 ganger mindre enn 7. Så da flytter du komma en lenger til høyre.
- Lærer: Akkurat. Sånn at du kikker på den du? (peker på $249:7$).
- Jakob: Ja, jeg kikker på den, og så ...
- Lærer: ... og den her (peker på $249:0,7$; markerer 7 og 0,7 med grønt på tavla). Så sier du at 0,7, for her vi det samme tallet vi deler med. Så sier du at 0,7 er 10 ganger mindre enn 7 ...
- Jakob: ... enn 7 for du må gange 0,7 med 10 for å få 7.
- Lærer: Ja, og da blir svaret her ...
- Jakob: Mest sannsynlig 355,71.

Lærer: Ja, du snakker om å flytte kommaet, da? Ja, Martine?

Martine: Det blir 10 ganger større.

Lærer: 10 ganger større. Akkurat. Så du ser at i forhold til det, svaret der oppå (35,571), så ser du at det tallet her nå (355,71) har blitt 10 ganger større, fordi at det jeg deler med er 10 ganger mindre.

I arbeidet med oppgaven fremhever læreren *relasjoner som bygger på posisjonssystemet*, i dette eksemplet det at tallet 0,7 er 10 ganger mindre enn tallet 7, og at tallet 355,71 er 10 ganger større enn tallet 35,571. Disse relasjonene er viktige for å kunne begrunne regelen om «flytting av komma» som ofte brukes i divisjon med desimaltall.

Bruk av «snille tall» i multiplikasjon

På 5.trinn spør læreren hvordan man kan regne ut hvor mye $4 \cdot 49$ er når man kjenner svaret på $4 \cdot 50$. Elevene foreslår: «4 ganger 50 er jo 200, så da må jo 4 ganger 49 bare være minus 4. 196.» Strategien begrunnes gjennom bruk av en regnefortelling og illustrasjon og samtalen videre handler om hvordan man kan finne svaret på $4 \cdot 48$ og $4 \cdot 52$ ved å bruke $4 \cdot 50$ som utgangspunkt. Læreren oppsummer arbeidet med å si:

Dette her er et regnestykke der det er lett å gå til et snillere tall, sant (ringer rundt regnestykket $4 \cdot 52 = 208$, på tavla). Nå gikk vi til et snillere tall (peker på $4 \cdot 50 = 200$ på tavla) for å finne ut svaret på det regnestykket, der. Er det andre regnestykker dere kan komme på, der det er lett, og det trenger ikke være 4-gangen heller, hvor det kan være lettere å gå til et snillere tall?

I denne episoden kommer aspektet *relasjoner mellom tall* tydelig frem ved at læreren fremhever bruk av noen referansetall («snille tall») som

strategi i multiplikasjon. Strategien byggen på den distributive egenskapen, men læreren velger ikke å fremheve den egenskapen eksplisitt. Hun velger i stedet å diskutere hva som kan være «snille tall» i andre eksempler.

Lag det tallet

Elevene på sjuende trinn spiller «Lag det tallet»-spillet. Elevene får fem kort og skal bruke flest mulig av dem til å lage et regnestykke med et bestemt tall som svar. Følgende samtale utspiller seg etter at elevene har spilt en runde.

Miriam skriver regnestykket $12 + 13 - 13 - 6$ på tavla. Læreren spør resten av klassen om hvilket tall Miriam ønsket å få.

Tuva: 6. Du tar 12 pluss 13 minus 13, som er 12. Og så minus 6 som er 6.

Lærer: Du sa altså 12 pluss 13 minus 13, det ble fortsatt 12? Hvorfor er det slik?

Thea: De plusset jo den på tallet så tok de den bort igjen, så teknisk sett så har den jo aldri vært der. De har bare plassert den der så de skal bruke tall. De kunne jo egentlig ha brukt bare 12 minus 6.

Lærer: Men så for å få brukt opp flere kort da, så har de ... Hva er $13 - 13$ da? (ler). Ja, Jørgen?

Jørgen: 0.

Lærer: Det er 0. Og når vi legger til 0, så blir det ikke noe endring, ikke sant? Noen flere som vil vise et eksempel? Vil du, Jakob? Kan dere prøve å gjette hvilket tall Jakob skulle lage?

Jakob kommer opp og skriver
 $(13 + 7 - 10) \cdot (12 - 11) =$

Tuva: 10? Jeg tenker 13 pluss 7 minus 10 som er 10. Fordi 13 pluss 7 er 20, så da blir det på en måte delt på 2. Og så 12 minus 11 er 1, så da blir det 10 ganger 1.

- Lærer: Så da blir det 10 ganger 1, så det blir 10. Hmm. Her oppe, hva var det de brukte ... Hvilket tall var det de brukte her for å på en måte eee ... få brukt mange kort uten at det hadde noen betydning for verdien til kortene? (peker på $13 - 13$ fra forrige regnestykke). Henrik?
- Henrik: 0.
- Lærer: 0. Men her har vi brukt gange, hvilket tall er det vi må bruke når vi har gange, for å ikke skal få gjort noe med verdien til tallene? Magnus?
- Magnus: 1.
- Lærer: 1, ja! (markerer på tavla $13 - 13 = 0$ i det første uttrykket og $12 - 11 = 1$ på det andre)

I samtalen fremhever læreren rollen til identitetslementer, 0 for addisjon og 1 for multiplikasjon. Identitetslementene er viktige innenfor grunnleggende egenskap ved regneoperasjoner, og de har en sentral rolle f.eks. i arbeid med ligninger, negative tall og brøk. Rammene i spillet legger opp til at de diskuteres eksplisitt og læreren utnytter muligheten.

Aktivitetene ovenfor legger opp til arbeid med flere komponenter av matematisk kompetanse, men her er det bare den begrepsmessige forståelsen som blir diskutert. Flere eksempler tas opp i de andre artiklene i serien, og aspekter knyttet til andre komponenter av matematisk kompetanse trekkes frem.

Noter

- 1 Eksempelene fra praksis er utviklet innen prosjektet «Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning» ved Matematikksenteret, og filmene eksempelene er hentet fra er lagt ut på: <http://www.matematikksenteret.no/content/4793/Innholdsside>.

Aktiviteten med 18 prikker er en del av filmen «Kvikkbilde 2·4+3·4», de øvrige aktivitetene er fra filmene med tilsvarende overskrift.

Referanser

- Anghileri, J. (2006) *Teaching Number Sense*, 2nd edn. London: Continuum.
- Barmby, P., Harries, T., Higgins, S., & Suggate, J. (2009). The Array Representation and Primary Children's Understanding and Reasoning in Multiplication. *Educational Studies in Mathematics*, 70(3), 217–241.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically : Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: N.H., Heinemann
- Case, R. (1998, April). *A psychological model of number sense and its development*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego.
- Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.
- Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (red.)(2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. J. Washington, National Research Council. DC: National Academy Press.
- Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding*. New York: Routledge 3.utg.
- Markovits, Z., & Sowder, J. (1994). developing Number Sense: An Intervention Study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4–29.
- McIntosh, A., Reys, B. og Reys, R. (1992). A proposed framework for examining number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 25–31.
- Parrish, S. (2010). *Number talks. Helping children build mental math and computation strategies*. Scholastic Inc.

(fortsettes side 35)

(fortsatt fra side 16)

- Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). *Connecting Arithmetic to Algebra*. Portsmouth, N.H.: Heinemann.
- Saxe, B. G., Diakow, R., & Gearhart, M. (2013). Towards curricular coherence in integers and fractions: a study of the efficacy of a lesson sequence that uses the number line as the principal representational context. *ZDM Mathematics Education*, 45, 343–364.
- Setler, C., Prediger, S., Nuhrenborger, M., & Husmann, S. (2012). Taking away and determining the difference - a longitudinal perspective on two models of subtraction and the inverse relation to addition. *Educational studies in Mathematics*, 79, 389–408.