Anita Valenta

Tallforståelse – beregning

Kilpatrick, Swafford og Findell (2001) beskriver matematisk kompetanse som sammensatt av fem komponenter: begrepsmessig forståelse, beregning, anvendelse (strategisk tenking), resonnering og engasjement. Disse fem komponentene ses tett sammenflettet og er avhengige av hverandre.

I en serie på fire artikler i Tangenten vil ulike aspekter ved tallforståelse på mellomtrinnet knyttet til hver av de fem komponentene av matematisk kompetanse bli presentert og drøftet. Aspektene er basert på forskning og utviklingsarbeid knyttet til matematikkdidaktiske prosjekt om arbeid med tall på mellomtrinnet. Artiklene vil vise hvordan tallforståelse kan komme til uttrykk i undervisning, dette blir eksemplifisert gjennom episoder fra 4.–7.trinn. I Valenta (2016) ble begrepsmessig forståelse diskutert. Denne artikkelen handler om beregning.

Beregning

handler om kunnskap om ulike matematiske prosedyrer/strategier, når og hvordan de kan brukes, og *å kunne utføre dem nøyaktig, fleksibelt og hensiktsmessig*. På engelsk heter denne komponenten av matematisk kompetanse *procedural fluency*. Boaler diskuterer i (2016) begrepet *fluency* knyttet til arbeid med regneoperasjoner, altså det som kalles *beregning* her, og påpeker at begrepet ikke handler om memorering og faktakunnskap, men om *å behandle tall og operasjoner fleksibelt*, veksle mellom ulike prosedyrer og representasjoner og foreta hensiktsmessige valg i en gitt situasjon. Det innebærer innsikt i ulike egenskaper ved og relasjoner mellom tall og operasjoner og evnen til å utnytte dem i arbeid med aritmetiske problem.

Tradisjonelt har standardalgoritmer for de ulike regneartene hatt en sentral plass i arbeid med tall i skolen. Forskning viser til flere problematiske sider ved det. En studie gjennomført av Kamii og Dominick (1997) viser at elever som er vant til en tradisjonell undervisning med fokus på algoritmer og øving på å bruke dem, gjør det dårligere når de skal regne ut ulike regnestykker enn elever som har arbeidet med å utvikle varierte strategier og bruke dem fleksibelt avhengig av de involverte tallene. Fosnot og Dolk (2001, 2002) påpeker at standardalgoritmene er blitt utviklet i en annen tid, da det ikke var noen digitale hjelpemidler, og at de er utviklet til å være så effektive som mulig. Effektiviteten i dem baserer seg blant annet på *å ikke betrakte de involverte tallene som helhet,*

Anita Valenta
Matematikksenteret
anita.valenta@matematikksenteret.no

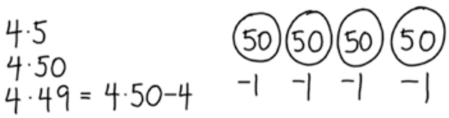
Artikkelen er del 2 i en serie på fire artikler.

men behandle siffer for siffer. En slik tilnærming kommer ofte i konflikt med utvikling av elevers forståelse for strategien som brukes, og elevene lærer algoritmer bare som regler og oppskrifter. En konsekvens av det kan være at elever slutter å prøve å finne en *måte å tenke på* som gir mening for dem. De slutter også å tenke på hva de ulike regneoperasjonene egentlig gjør med tallene, og de vurderer ikke svarene de får. Elever prøver bare å huske oppskriften og anvende den på riktig måte. Man kan si at elevers utvikling av tallforståelse kan stoppe opp i møte med algoritmer (Fosnot og Dolk, 2001). Dette medfører et spørsmål om hvorvidt standardalgoritmene bør arbeides med på skolen i det hele tatt, når både utviklingen av elevenes tallforståelse og samfunnsutviklingen tas i betraktning. På en annen side kan det argumenteres for at det er effektive prosedyrer som har blitt utviklet og vist seg å være nyttige gjennom historien. Det er dessuten mulig å nærme seg algoritmer på en annen måte, over lang tid, gjennom arbeid med elevers resonnering og forståelse, som en av de ulike strategiene det arbeides med (se Johnsen-Høines, 2006).

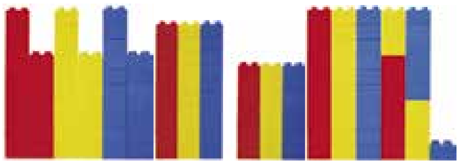
Denne artikkelen tar ikke stilling til om elever skal bli kjent med standardalgoritmer eller ikke. Det som er viktig, er at elever skal utvikle ulike strategier i arbeid med regneoperasjoner, kunne bruke dem fleksibelt og hensiktsmessig og at strategiene bygger på elevers resonnering (se for eksempel Anghileri, 2006; Carpenter, Fennema, Franke, Levi & Empson, 1999). Utvikling og bruk av strategier skjer i samspill med ulike relasjoner, representasjoner og egenskaper ved tall og regneoperasjoner. Estimering har en viktig rolle i prosessen (se for eksempel Dehane, 2011; Kilpatrick m.fl., 2001). Under estimering resonnerer man om den gitte operasjonen, man vurderer tallstørrelser og tar i bruk ulike egenskaper ved tall og operasjoner. Estimering er også viktig i arbeid med matematisk modellering og anvendelse.

Som Kilpatrick m.fl. (2001) diskuterer, er de ulike komponentene i matematisk kompetanse knyttet tett sammen og støtter hverandre. I diskusjoner om beregning er det viktig å se aspekter knyttet til begrepsmessig forståelse, resonnering og anvendelse som del av en helhet. Følgende aspekter kan sees som sentrale når det gjelder beregning (de har sammenheng de andre komponentene også):
Utvikling av varierte strategier handler om å kunne utvikle strategier i arbeid med regneoperasjoner. Fosnot og Dolk (2001, 2002) fremhever betydningen av at elever utvikler ulike strategier med utgangspunkt i regnefortellinger og illustrasjoner. Når strategier utvikles på den måten, er det enklere for elevene selv å vurdere hva som kan gjøres, og hva som ikke gir mening. Overganger mellom de ulike representasjonene er av stor betydning i denne utviklingen. Hvis en strategi utvikles for eksempel gjennom en regnefortelling, er det viktig at den også beskrives symbolsk. Det kan virke til at en bevissthet om fremgangsmåten generaliseres utover den gitte konteksten. Arbeid med tallmønster kan også være utgangspunkt for utvikling av variere strategier (se for eksempel Shumway, 2011; Parrish, 2010). Eksempler:

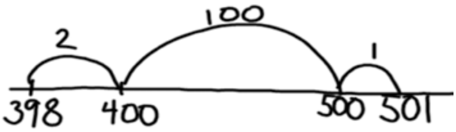
– For å regne ut antall drops i 4 poser med 49 drops, kan man utnytter at 49 drops er 1 færre enn 50. Da kan man regne ut $4 \cdot 49$ som $4 \cdot 50 - 4 \cdot 1$.



– Regne ut $3 \cdot 17$ ved å tenke på 17 som 17 klosser som deles opp i 10 og 7. Da kan $3 \cdot 17$ ses som $3 \cdot (10 + 7) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7$



- Man kan tenke på 501 – 398 som differansen mellom tallene på tallinje og regne «bakover».
  501 – 398 = 1 + 100 + 2



- 12 : 4 = 3
  12 : 2 = 6
  12 : 1 = 12
  12 : ½ = ?
  Hva er likt, og hva er forskjellig i de tre første regnestykkene? Er det noen relasjoner mellom tallene? Hva kan svaret på det siste regnetykket være hvis vi skal følge mønsteret?

Bruk av varierte strategier består i å beherske ulike skriftlige og muntlige strategier i arbeid med tall og regneoperasjoner og å kunne bruke estimering og digitale hjelpemidler. I denne artikkelen skilles det ikke spesielt mellom muntlige og skriftlige strategier, siden det gjerne er den samme tenkingen som ligger i bunn, og det avhenger av tallene om det kan være nødvendig å notere noe underveis (se også Fosnot & Dolk, 2002; Carpenter, Fennema, Franke, Levi & Empson, 1999). I de ulike regnestrategiene er det forskjellige egenskaper ved tall, posisjonssystemet og operasjoner som utnyttes. Eksempler:

- For å estimere 75 · 89 kan vi runde av 89 til 100 og se at svaret må være under 7500. Man kan resonnere videre at svaret er ca. 90 % av 7500 og må ligge i området 6500–7000.
- Noen forslag for mulige strategier/fremgangsmåter for å beregne 75 · 89 eksakt kan være:
  (10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5) ·89
  7 · (10 · 89) + (10 · 89) : 2
  (100 – 25) · 89, der 25 · 89 er en firedel av 100 · 89
  ¾ · (100 · 89)
  75 · (100 – 10 – 1) 7500 – 750 – 75
- I de forskjellige strategiene utnyttes egenskapene ved multiplikasjon og de involverte tallene, posisjonssystemet og ulike referansetall.
- Noen mulige strategier for å regne ut 127 + 206 der man utnytter posisjonssystemet samt assosiativ og kommutativ egenskap for addisjon, kan være:

  120 + 200 + 7 + 6 = 320 +13
  127 + 200 + 6 = 327 + 6
  206 +120 + 7 = 326 + 7
  130 + 206 – 3 = 336 – 3
  130 + 210 – 3 – 4 = 340 – 7

Valg av en hensiktsmessig strategi handler om å kunne vurdere hvilken strategi som kan være hensiktsmessig for det gitte regnestykket og for den gitte situasjonen. Selv om det kan være mange fremgangsmåter for å finne svar i et gitt regnestykke, er gjerne noen strategier mer hensiktsmessige enn andre for akkurat de gitte tallene. I mange situasjoner, spesielt de som er knyttet til dagliglivet, er det heller ikke så viktig med et helt nøyaktig svar, det holder med et estimat. Videre, i situasjoner der **nøyaktig svar er viktig**, der utregninger ikke står i fokus, og der tallene er «lite pene», kan bruk av kalkulator være mest hensiktsmessig. Eksempler:

- For å regne ut 0,25 · 36 kan det være hensiktsmessig å utnytte det som er spesielt med tallet 0, 25 – det at det er det samme som en firedel. 0,25 · 36 er slik det samme som en fjerdedel av 36, og det er 9.
- For å regne ut 17 · 98 kan det være lurt å utnytte at 98 er nær 100. Strategien blir da 17 · 100 – 17 · 2 = 1700 – 34.
- For å regne ut 235 – 197 kan en hensiktsmessig strategi være å øke begge tallene med 3. Da får man et enklere regnestykke 238 – 200, og differansen er fortsatt den samme.

En annen strategi som kanskje er like hensiktsmessig, er å ta 200 som referansetall og se på begge de involverte tallene ut fra det – differansen mellom 235 og 200 er 35, mellom 200 og 197 er det 3; differansen mellom 235 og 197 er da $35 + 3$.

– Her er det lite hensiktsmessig å dele opp begge tallene ut fra posisjonssystemet (som i standardalgoritmen).
– For å finne ut hvor mange pakker drops man kan kjøpe for 100 kroner når hver pakke koster 11,90 kr, kan det være hensiktsmessig å runde av prisen og estimere.
– I situasjoner der man trenger et nøyaktig svar på regnestykker som $68 \cdot 842$ eller $134{,}24 : 51{,}2$ er bruk av digitale hjelpemidler et naturlig valg.

Effektivitet og nøyaktighet er viktige elementer i arbeid med regneoperasjoner. Arbeid med matematiske problem krever ofte en del utregninger, og det kan være greit at man etter hvert kan utføre dem uten å være nødt til å tegne og telle. Effektivitet og nøyaktighet i beregning bygger på automatisering av enkle tallfakta, et spekter av referansetall og et bredt utvalg av strategier man kan velge mellom. Som Boaler (2016) diskuterer, er automatisering av enkle tallfakta som $9 + 5 = 14$ og $12 \cdot 10 = 120$ viktig for videre arbeid med tall. Det er imidlertid viktig at læringen ikke handler om ren memorering. Erfaringer med tallfakta i ulike situasjoner, gjennom ulike representasjoner og med fokus på strukturer og relasjoner vil etter hvert føre til automatisering. Erfaringer med ulike strategier og diskusjoner om hvilke som kan være hensiktsmessige i en gitt situasjon, kan legge til rette for en gradvis effektivisering av valg av strategi for å løse et gitt problem og utnyttelsen av faktakunnskap. Eksempler:

– En effektiv strategi for å regne ut $128 : 8$ kan være å se 128 som 12 tiere og 8 enere, og det skal deles på 8. Det gir 1 hel tier til hver. Da er det 48 enere igjen. $48 : 8$ er 6 og svaret blir $10 + 6 = 16$.
I strategien gis divisjonen «deles på et antall personer» mening. Posisjonssystemet og veksling mellom tiere og enere utnyttes for å ta i bruk faktakunnskap og gjøre utregningen enklest mulig.
– Når man skal regne ut $75 \cdot 89$, kan det være en effektiv strategi å ta utgangspunkt i at $75 \cdot 100 = 7500$ og så subtrahere en tidel og en hundredel. $7500 - 750 - 75$
Da utnyttes strukturen av tallet 89 som $100 - 10 - 1$. Det gjøres for å kunne utnytte at multiplikasjon med 100, 10 og 1 er (etter hvert) faktakunnskap. Utregningen blir nå enkel nok til at mange kan regne det ut i hodet.

Eksempler fra undervisning

Det er mye matematisk tenking, utforskning og diskusjon som skal til for å utvikle god kompetanse innenfor beregning. Undervisningen elever gis mulighet til å delta i, har stor betydning, og det stilles store krav til læreren i utforming av undervisning som legger til rette for at elever skal utvikle varierte strategier som de forstår og klarer å bruke hensiktsmessig og effektivt. Arbeid med å regne ut ulike regnestykker kan ikke bære preg av oppskrifter og øving. Det kjennetegnes av resonnering, estimering, bruk av ulike representasjoner, søking etter mønster, av diskusjon og argumentasjon. Aktivitetene som brukes i undervisningen må være nøye gjennomtenkte, regnestykkene og de involverte tallene valgt ut slik at de fremmer konkrete strategier eller ideer som ønskes diskutert.

I analysen av det faglige innholdet i episodene fra praksis nedenfor[1] belyses spesielt aspektene knyttet til beregning som kommer til uttrykk.

Skredder og skjerf

På sjette trinn ønsker læreren å diskutere divisjon med brøk med elevene. Han utformer følgende oppgave med tanke på det:

En skredder har 6 meter stoff og skal sy skjerf.

a) For hvert skjerf trenger han 1/2 meter stoff. Hvor mange skjerf kan han sy? Tegn og skriv et regnestykke som kan passe til regnefortellingen.
b) Enn hvis han skal sy en annen type skjerf som er slik at det trengs 1/4 meter stoff for hvert skjerf? Blir det flere eller færre skjerf enn i stad? Kan man finne ut hvor mange skjerf det blir, uten å regne på nytt? Hvordan? Hvilket regnestykke passer til denne regnefortellingen?
c) For en tredje type skjerf trengs det 3/4 meter stoff for hvert skjerf. Blir det flere eller færre skjerf enn i b), enn i a)? Kan man finne ut hvor mange skjerf det blir uten å regne (helt) på nytt? Hvordan? Hvilket regnestykke passer til denne regnefortellingen?

Læreren planlegger å presentere oppgaven muntlig, la elevene arbeide i grupper og ha en felles diskusjon etter hver deloppgave. Som sentrale momenter i diskusjonen ser han for seg ulike strategier og sammenhenger mellom disse. Videre har han som mål å få frem at dette er en kontekst som er aktuell for divisjon, og at de ulike strategiene **på ulike måter** skal representeres ved bruk av tegninger, tallinje og symboler. Spesielt ønsker han å diskutere hva som skjer med svaret på et divisjonsstykke når divisor minker eller **øker med en** gitt faktor, og hvordan relasjonen kan utnyttes når man skal dele med brøk.

Han noterer også et spørsmål som kan diskuteres til slutt:

a) Hva med regnestykket 10 : 5/4? Hvordan kan vi finne svaret på det? Kan vi tenke oss en regnefortelling som passer til det regnestykket, og som vi kan bruke til å finne svaret? (Hvis stille, tipse om skredder. Men så spørre om det kan være noen andre situasjoner.)

Hensikten med opplegget er at elevene skal *utvikle varierte strategier* i arbeidet med deling med brøk. Læreren velger en oppgave som legger til rette for at utviklingen skjer med utgangspunkt i en regnefortelling. Han velger tallene slik at det er samme dividend hele tiden, og at det blir ulike relasjoner mellom divisorer som han ønsker at elevene skal ta i bruk i utviklingen av strategier: ¼ er halvparten av ½, ¾ *er tre ganger større enn* ¼. *Videre kan relasjoner mellom* ½ *og* 1 (*at* ½ *er halvparten av tallet 1)* og ¼ og 1 (at ¼ er fire ganger mindre enn 1) være interessante å utnytte og diskutere med elevene.

Under arbeidet med deloppgave a) bruker elevene ulike strategier for å komme frem til at det blir 12 skjerf, men er usikre på om hvilket regnestykke som kan passe til situasjonen. Flere foreslår at det er $6 \cdot 2 = 12$, siden det beskriver strategien de har brukt, men kjenner ikke igjen selve situasjonen som en (målings-)divisjon **6 : ½** = 12. For å hjelpe elevene med å kjenne igjen at det er en divisjonssituasjon, spør læreren om hvilket regnestykke det ville vært om skredderen hadde 6 meter stoff og skulle sy skjerf på 2 meter. Noen elever foreslår regnestykket $2 \cdot \_ = 6$, andre foreslår $6 : 2 = \_$. I samtalen med elevene innser læreren at elevene ikke har arbeidet nok med divisjon som målingsdivisjon til at regnefortellingen oppleves som en naturlig inngang til diskusjon om divisjon. Han velger å ikke presse videre på det i den økta, men heller å vende tilbake til det senere.

I videre arbeid med deloppgave b) og c) diskuteres ikke divisjon mer. Elevene resonnerer innenfor konteksten med skredder og skjerf og bruker tegninger. De viser at antall skjerf i b) er dobbelt så stort som i a), og at antallet kan finnes ved å multiplisere hele lengden med 4. I c) viser de at antallet er en tredjedel av antallet i b).

Det er viktige sammenhenger som diskuteres i timen. Regnefortellingen abstraheres etter hvert til «uendelig små skjerf» som da gir «uendelig mange skjerf», og elevene inviteres til resonnering knyttet til viktige matematiske ideer. Men siden regnefortellingen og de ulike strategiene ikke blir knyttet til divisjon og generalisert på den måten utover situasjonen med skredder og skjerf, legger ikke timen opp til utvikling av varierte strategier innenfor divisjon i den grad det var planlagt på forhånd. Grunnen til det var elevers utrygghet med ulike representasjoner av divisjon, målingsdivisjon i dette tilfelle.

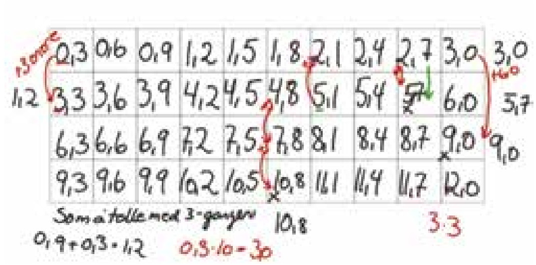
Eksempelet viser tydelig hvordan begrepsmessig forståelse og beregning er knyttet tett sammen og avhenger av hverandre. Det viser også at læreren bruker skjønn i hvor hvor langt han utvider området for den matematiske aktiviteten, og hvordan han noen ganger må la stoff kunne bli hentet opp ved senere anledning.

12·149

På femte trinn presenterer læreren en streng av relaterte regnestykker (se f.eks. Fosnot & Dolk, 2002), og hensikten er **å** diskutere ulike strategier innen multiplikasjon. Oppgavestrengen timen er utformet rundt, er:

$$
\begin{aligned}
2 \cdot 150 \\
10 \cdot 150 \\
12 \cdot 150 \\
12 \cdot 149
\end{aligned}
$$

For hvert regnestykke diskuteres det ulike måter å tenke på og sammenhenger mellom strategiene og regnestykkene. Strengen er utformet for å fremheve spesielt bruk av den distributive egenskapen gjennom sammenhengen mellom de første to stykkene og det tredje: $12 \cdot 149 = (10 + 2) \cdot 150 = 10 \cdot 150 + 2 \cdot 150$. I tillegg til den distributive egenskapen utnyttes her posisjonssystemet og multiplikasjon med 10, og strategien er egentlig den samme som er utgangspunktet i standardalgoritmen for multiplikasjon.



Strategien der man bruker det tredje for å regne ut det fjerde regnestykket,

$12 \cdot 149 = 12 \cdot (150 - 1) = 12 \cdot 150 - 12 \cdot 1$,

er også basert på den distributive egenskapen, men her utnyttes ikke posisjonssystemet, men 150 som et referansetall og regnestykket $12 \cdot 150$ som faktakunnskap.

I episoden er *bruk av ulike strategier* er et sentralt aspekt. Videre diskuteres *valg av en hensiktsmessig strategi* ved at strategier der man utnytter relasjoner mellom de involverte tallene og situasjonen der noen regnestykker allerede er kjent, fremheves.

Telle i kor med 0,3 fra 0,3

På syvende trinn teller elevene i kor fra 0,3 i steg på 0,3. Læreren noterer tellingen på tavla, rad for rad, med ti tall i hver rad. Læreren stopper opp flere ganger underveis i tellingen, og ulike relasjoner og mønster som kommer frem, diskuteres og noteres på tavla.

Telling i kor kan bidra til automatisering av enkle tallfakta og dermed utvikling av *effektivitet og nøyaktighet*. Aktiviteten er videre en øving i bruk av hoderegning, og diskusjoner underveis om mønster og relasjoner som elevene legger merke til i tabellen, kan brukes til å fremheve *bruk av ulike strategier* og sammenhenger mellom dem (mer om aktiviteten kan leses i f.eks. Shumway, 2011).

Beregning er viktig for utvikling av elevers tallforståelse og videre arbeid med matematikk, men det er viktig å huske at den er tett knyttet til de andre komponentene av matematisk kompetanse – begrepsmessig forståelse, resonnering, anvendelse og engasjement, og at de ulike komponentene «vokser» sammen. Det betyr at det ikke er slik at «bare elevene blir flinke til å regne, så kommer forståelsen etter hvert», noe man ofte kan høre. «Flink til å regne» innebærer mye mer enn å kunne følge et gitt oppsett. Beregningskompetansen er kompleks, og dens utvikling krever mye innsats både fra lærer og elever. Utforskning, resonnering og rike matematiske samtaler kan ikke være forbeholdt bare noen spesielle grublere og lignende. De må kjennetegne arbeid med det som ofte betraktes som de kjedeligste oppgavene i matematikk – de som går ut på å regne ut noen regnestykker.

Note

1 Eksemplene fra praksis er utviklet innen prosjektet «Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning» ved Matematikksenteret, og filmene eksemplene er hentet fra er lagt ut på: http://www.matematikksenteret.no/content/4793/Innholdsside.
Aktivitetene er fra filmene med tilsvarende overskrift. På siden kan det også leses mer om de ulike typene aktiviteter som diskuteres her.

Referanser

Angileri, J. (2006). *Teaching Number Sense*, 2nd edn. London: Continuum.

Boiler, J. (2016). Fluency without fear. *Tangenten: tidsskrift for matematikk i grunnskolen, 24*(1), 17–24.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Franke, M.L., Levi, L., & Empson, S.B. (1999). *Children´s mathematics. Cognitively guided instruction.* Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics*. OUP USA.

Fosnot, C.T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division.* Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Fosnot, C.T., & Dolk, M. (2002). *Young mathematicians at work: constructing fractions, decimals, and percents.* Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Johnsen-Høines, M. (2006). *Begynneropplæringen*. Bergen: Caspar Forlag.

Kamii, C., & Dominick, A. (1997). To Teach or Not to Teach Algorithms. *Journal of Mathematical Behavoir, 16*(1), 51–61.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (red.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Washington, National Research Council. DC: National Academy Press.

Parrish, S. (2010). *Number talks. Helping children build mental math and computation strategies*. Scholastic Inc.

Shumway, J.F. (2011). *Number sense routines: Building numerical literacy every day in grades K-3*. Stenhouse Publishers

Valenta, A. (2016). Tallforståelse – begrepsmessig forståelse. *Tangenten: tidsskrift for matematikk i grunnskolen, 27*(1), 10–16.