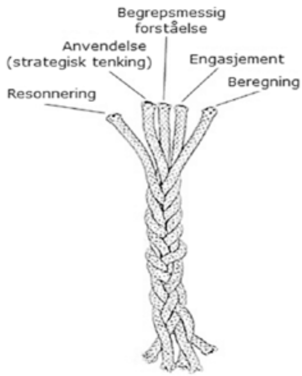
Anita Valenta

Tallforståelse – resonnering

I en serie på fire artikler i Tangenten diskuteres hva tallforståelse på mellomtrinnet kan være. Diskusjonen tar utgangspunkt beskrivelsen av matematisk kompetanse som er gitt av Kilpatrick, Swafford og Findell (2001). I Valenta (2016a) og Valenta (2016b) ble henholdsvis begrepsmessig forståelse og beregning diskutert. Denne artikkelen drøfter ulike aspekt ved resonnering knyttet til tallforståelse, eksemplifisert med episoder fra 4.–7. trinn.

Resonnering

Det ligger i matematikkens natur at en alltid kan og skal argumentere for gyldigheten av en fremgangsmåte eller sammenheng. Det kan gjøres ved å utforme et logisk resonnement med utgangspunkt i noe som er kjent fra før, og stake ut veien mot det som er ukjent og skal undersøkes. Elever om er usikre i sine løsningsforslag, trenger ikke å sjekke med læreren, andre elever eller fasiten i boka – de trenger bare å sjekke om resonneringen deres er gyldig. Evnen til å utforme logiske resonnement og vurdere deres gyldighet er krevende å utvikle. Samtidig er resonnering helt sentralt i matematisk arbeid og en svært viktig del av matematisk kompetanse. Det er resonnering som gir mening til matematiske ideer, begreper og sammenhenger, og det er gjennom resonnering faget utvikles. Studier viser at elever tidlig i skolegangen, og også i barnehagen, kan tenke omkring matematiske sammenhenger og forklare og begrunne sin tankegang når de oppfordres og støttes i det (Carpenter, Franke & Levi, 2003; Stylianides, 2007; Schifter, 2009; Hovik & Solem, 2012). Økt fokus på resonnering fra barnetrinnet støtter elevers meningsskaping i matematikk og legger til rette for å utvikle dyp forståelse av begreper og sammenhenger.



Resonnering handler om å kunne tenke logisk omkring relasjoner mellom begreper og situasjoner, reflektere, utforme hypoteser, forklare og argumentere for sammenhenger mellom ulike begreper, egenskaper og framgangsmåter. Ofte tenker man på matematisk resonnering først og fremst som formelle matematiske bevis og deduktiv tenking, men Kilpa-

Anita Valenta
Matematikksenteret
anita.valenta@matematikksenteret.no

Artikkelen er del tre i en serie på fire artikler.

trick et al. (2001) ser på resonnering bredere og inkluderer også intuitiv og induktiv resonnering og argumentasjon ut fra mønster, tegninger og konkreter.

Innenfor tallforståelse på mellomtrinnet kan resonnering handle om ulike sammenhenger og egenskaper ved tall og regneoperasjoner. Resonnering kan fremheves i situasjoner der elever utforsker et gitt problem, legger merke til ulike strukturer, mønster og sammenhenger og kommer med ulike løsningsforslag/hypoteser. Resonnering tar ulike former avhengig om det omhandler et enkelteksempel eller et endelig eller uendelig antall eksempler (se Stylianides og Ball, 2008[1]). Hvis det skal resonneres om et enkelt eksempel, for eksempel om summen av 27 og 49 er et partall eller et oddetall, er resonneringen nødvendigvis forskjellig fra resonnering knyttet til summen av to oddetall som begge er mindre enn 50, som igjen er forskjellig fra tenkingen omkring summen av to fritt valgte oddetall. For å argumentere for at summen av 27 og 49 er et partall, trenger man å ta i bruk betydning av addisjon og definisjon av partall og oddetall. For å argumentere for summen av to oddetall som begge er mindre enn 50, må man i tillegg enten systematisk prøve ut alle eksemplene eller utforme et generelt argument som omhandler alle de gitte eksemplene. I det siste tilfellet, summen av to oddetall generelt, er det nødvendig med det siste – et generelt argument som tar utgangspunkt i strukturen til partall og oddetall.

Grunnlaget i et resonnement kan være definisjoner, aksiomer, tidligere etablerte resultater eller matematiske sammenhenger som er akseptert av klassen og ikke trenger nærmere begrunnelse. Både dette grunnlaget, måtene å resonnere på og måtene å uttrykke resonnementet på er avhengige av elevenes kunnskap og erfaring, som er forskjellig fra trinn til trinn og klasse til klasse. Et resonnement må ikke bare være matematisk holdbart, men også tilpasset elevgruppen.

Når det gjelder tallforståelse på mellomtrinnet, kan resonneringskomponenten av matematisk kompetanse ses som bestående av følgende aspekter:

Gjenkjenning og beskrivelse av struktur, mønster og sammenhenger i arbeidet med tall er det første steget i resonnering. Eksempler:

– I sekvensen av regnestykker nedenfor fremheves det en sammenheng mellom divisor (halveres) og kvotient (dobles).

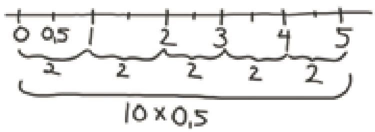
  $12:4 = 3,\;\; 12:2 = 6,\;\; 12:1 = 12,\;\; 12:½ = ?$

  Denne sammenhengen kan lede til observasjon av ulike relasjoner som kan diskuteres videre:
  Svaret på $12:½$ er 24.
  Når divisor i et divisjonsstykke halveres, dobles svaret
  Når vi deler et tall med en brøk som har 1 i telleren, multipliserer vi tallet med nevneren.
– En elev sier: «Jeg tror at $99 \cdot 11 = 999$. Det er fordi at når man ganger et tall med 11, så gjentas tallet. Som for eksempel $3 \cdot 11 = 33$, $7 \cdot 11 = 77$ og $8 \cdot 11 = 88$.»

Resonnering omkring enkelteksempler består både i å kunne begrunne og kommunisere egne resonnement om enkelteksempler og å kunne følge med i andres resonnement. Bruk av forskjellige representasjoner er viktig for å kunne se hva som skjer og hvorfor. Eksempler:

– $12 \cdot 35 = 10 \cdot 35 + 2 \cdot 35$ fordi jeg kan tenke på $12 \cdot 35$ som 12 hauger med 35 kroner i hver. Jeg regner først ut hvor mye penger det er i 10 hauger, og så de to siste haugene. Da legger jeg sammen de to delene til slutt.
– Hvis den distributive egenskapen er kjent fra før, kan argumentasjonen være: Jeg deler 12 opp i to deler, multipliserer begge med 35 og legger sammen til slutt.
– Tallet 5 er 10 ganger større enn tallet 0,5. Det er fordi 0,5 betyr 5 tideler, og hvis man skal finne tallet som er 10 ganger større, så

tar man altså «5 tideler» 10 ganger. To og to «5 tideler» blir 1, så vi får 5 til slutt.



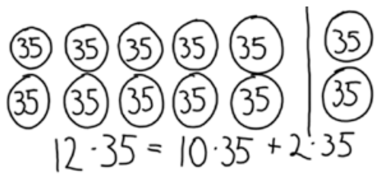
– $31 \cdot 10$ er 310 fordi man kan tenke på det som 31 tiere. 10 tiere er 100, 30 tiere er 300, så 31 tiere er 310.

Resonnering omkring et endelig antall eksempler. For å undersøke en sammenheng som gjelder et endelig antall eksempler, kan man enten prøve ut alle eksemplene systematisk eller utforme et generelt argument som handler om alle de gitte eksemplene. Eksempler:

– I undersøkende oppgaver er det ofte spørsmål om å finne alle mulige svar, som for eksempel: «Stian tar ut tre mynter fra sparegrisen. Hvor mye penger kan han ha tatt ut?» Begrunnelser for at man har funnet alle mulige svar, baserer seg gjerne på at man har tenkt systematisk, og at det ikke kan finnes flere alternativer enn dem man har listet opp.
– For å finne tallet mellom 50 og 100 som har flest divisorer, kan en mulighet være systematisk å undersøke antall divisorer for alle tall i intervallet. En annen mulighet er å resonnere generelt om hva som skal til for at et tall har mange divisorer – primtall kan man se bort fra; ser man på tall som er produkt av to primtall, så har de fire divisorer hvis primtallene er forskjellige (som $15 = 3 \cdot 5$), men bare tre divisorer om det er samme primtall (som $9 = 3 \cdot 3$). For å finne tallet med flest divisorer kan det derfor kanskje være lurt å se på tallene som er produkt av flest mulig forskjellige primtall.

Resonnering omkring et uendelig antall eksempler. Mange elever vil argumentere empirisk for hypoteser som angår et uendelig antall eksempler. Å prøve ut en hypotese på noen eksempler (se Balacheff, 1988; Stylianides, 2008) er ikke matematisk sett en gyldig argumentasjon. Å argumentere for en hypotese som omhandler uendelig mange eksempler, innebærer enten bruk av et generisk eksempel eller et deduktivt oppbygd, generelt resonnement. Et generisk eksempel er en måte å argumentere på der man bruker et eksempel «på en generell måte» for å se hva som skjer og hvorfor. Eksplisitt fremhever en at tilsvarende vil skje med alle andre eksempler (se Enge og Valenta, 2011; eller Schifter, 2009). Situasjoner som omhandler et uendelig antall eksempler, kan også undersøkes med generelle resonnement som bygger på kjente resultater, gjerne ved å ta i bruk algebraisk notasjon. I utformingen av en argumentasjon for at en hypotese som omhandler mange eksempler, ikke er gyldig, er det ofte nyttig å finne et moteksempel. Klarer man å finne et eksempel der hypotesen ikke holder, kan man konkludere med at den ikke er gyldig. Eksempler:

– Man kan alltid dele opp ett av tallene i en multiplikasjon og så multiplisere hvert av leddene med det andre tallet, som i $12 \cdot 35 = 10 \cdot 35 + 2 \cdot 35$. Vi kan også dele opp 12 i 7 + 5 eller 3 + 9, eller andre mulige kombinasjoner.

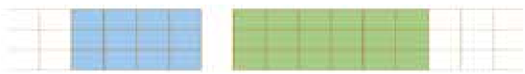


Det er fordi vi kan tenke på $12 \cdot 35$ som penger i 12 hauger, med 35 kroner i hver. Om vi lurer på hvor mye penger det er, kan vi dele haugene i 10 hauger og 2 hauger, finne ut hvor mye penger det er i hver av delene, og så legge sammen. Det kan vi alltid gjøre, uansett antall hauger og hvor mye penger det er i hver haug.
Eksemplet med $12 \cdot 35$ brukes som et generisk eksempel i resonnementet.
– Alle tall som er delelige med 6, er også delelige med 3.

Det vet jeg fordi vi kan se på 48 som $8 \cdot 6$. Det blir $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$. Vi kan dele hver sekser i to treere. Da blir $48 = 3 + 3 + \ldots + 3$ (16 ganger). Da er $48 = 16 \cdot 3$ og altså delelig med 3.
Det kan vi gjøre uansett hvilket tall som er delelig med 6. Vi starter med å dele opp hver sekser i to treere og ser da at tallet er delelig med 3 også.

Tallet 48 er brukt som et generisk eksempel her.

– Hypotese: Hvis vi legger sammen to tall som begge er delelige med 3, er også summen delelig med 3. Et generelt resonnement som viser at hypotesen stemmer, kan være:
Et tall som er delelig med 3, kan tenkes som et antall kvadrater som ligger inntil hverandre i 3 like lange rader. Et annet tall som er delelig med 3, kan ordnes på samme måte. Vi ser at vi kan legge sammen en rad fra det første tallet med en rad fra det andre tallet. Da får vi igjen 3 like lange rader, og antall kvadrater er summen av de to tallene vi startet med. Siden summen også er ordnet i 3 like lange tårn, er også summen delelig med 3.



– Samme hypotese som ovenfor kan begrunnes ved et annet generelt resonnement ved bruk av algebraiske symboler og kjennskap til den distributive lov.
Et tall som er delelig med 3, er på formen 3 · et positivt heltall. Hvis vi sier at det første tallet er $3 \cdot a$, og det andre tallet er $3 \cdot b$, er summen $3 \cdot a + 3 \cdot b$. Siden multiplikasjon er distributivt, er summen lik $3 \cdot (a + b)$ og delelig med 3.

– En elev foreslår at $99 \cdot 11 = 999$ fordi «Når vi ganger et tall med 11, så gjentas tallet som $3 \cdot 11 = 33$, $7 \cdot 11 = 77$ og $8 \cdot 11 = 88$.» Hypotesen stemmer for tallene 1–9, men ikke generelt. $99 \cdot 11$ er et moteksempel.

Eksempler fra undervisning

Resonnering er tett knyttet til de andre komponentene av matematisk kompetanse, men i analysen av det faglige innholdet i episodene fra praksis nedenfor belyses spesielt de aspektene knyttet til resonnering som kommer til uttrykk.[2]

Skredder og skjerf

På 6. trinn arbeider elever med en oppgave om en skredder som har 6 meter stoff og skal sy skjerf av ulike lengder. De har diskutert skjerf på 2 meter, 1 meter, 1/2 meter og 1/4 meter, og læreren Thomas spør om det er noen sammenheng mellom tallene. Her inviterer læreren til å *gjenkjenne og beskrive et mønster*. Jakob svarer: «Alle er i tregangen, og for hver gang det er et nytt tall, så dobles det. 3 ganger 2 er 6, 6 ganger 2 er 12 og 12 ganger 2 er 24.» Det er den andre sammenhengen – hvis størrelsen på skjerfet halveres, dobles antall skjerf – læreren har som mål for diskusjonen, og han går videre på det og utfordrer elevene til et *resonnement omkring et uendelig antall eksempler*: «Diskuter med skulderpartneren din om det er en slags sammenheng der. Om det er slik alltid.»

$2 \to 3$
$1 \to 6$
$\tfrac{1}{2} \to 12$
$\tfrac{1}{4} \to 24$

Elevene arbeider sammen i par. Thomas går rundt og snakker med gruppene. Ett av elevparene foreslår at det må være slik alltid, «for vi har gjort det hele tida».

Thomas: Så hvis det stemmer for de fire eksemplene der, så må det alltid stemme?
Marie: Nei, men det er litt sannsynlig.
Thomas: Sannsynlig, ok. Mmm. Det blir

mer og mer sannsynlig desto flere eksempler vi får?

Marie: Mer sannsynlig.

Thomas: Mmm.

Her legger læreren merke til at elevene resonnerer empirisk omkring et uendelig antall eksempler. Han utfordrer delvis deres resonnement, men velger å vente med en mer grundig diskusjon om det. Fellesdiskusjonen starter ved at Jakob trekker frem et tilfelle når lengden på skjerfet er 0.

Jakob: En meter … som tråd … og så skulle alt være 0, og hver av dem skal være null.
Da går det ikke.

Thomas: At hvis du tenker at vi minsker og minsker skjerfet helt til det blir 0.

Jakob: Ja, da går det ikke noe mer. Da, da blir jo null, det er jo null, det er jo ingenting.

Thomas: Syntax error på kalkulatoren, ja.

Vi kan si at Jakob foreslår et moteksempel for å vise at sammenhengen ikke vil fortsette «for alltid». Hvis lengden av skjerf er 0, må antall skjerf være 0, mener han, og da brytes mønsteret. En annen elev, Erik, er usikker på om «skjerf på 0 meter» egentlig er mulig, altså om det er et moteksempel Jakob har kommet med.

Erik: Jeg tenker, jeg tok litt, eller vi tok litt sånn det prinsipp med en lengde, en lengde er en lengde, liksom uansett hvor langt, det har ikke noe å si hvor stort tallet er eller noe, hva slags tall det er, for uansett det kan halveres. Det er bare hvis du er på en meter da, så halvere du det, det du kan halvere i evig tid fordi det er umulig å få helt null, det må, kan uansett halveres til et utrolig lite desimaltall, men kan halveres i evig tid.

Thomas spør videre om hvordan brøkene vil se ut etter hvert som vi «halverer lenger her», om det vil være noe mønster. Etter en kort diskusjon om det kommer Jakob tilbake til utsagnet sitt.

Jakob: Det jeg sa med den der, hvis krympe og krympe det helt til det blir 0.
Null, det går jo, da må vi jo fylle ut hele verdensrommet på papir, hvis det skal bli null.

Thomas: Ja, men blir det noen gang 0 da …

Jakob: Nei …

Thomas: … som han Erik si?

Jakob: … aldri!

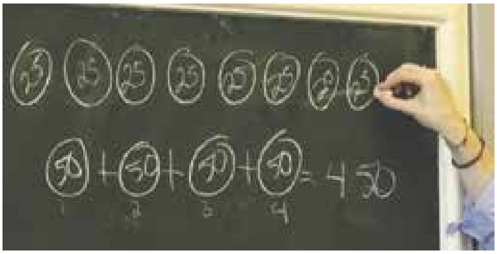
Thomas: Vi kan halvere så lenge vi vil, men kommer aldri helt på 0. Men hvis vi kommer veldig nærme 0 i lengden på skjerfet, hva skjer med antall skjerf da? Erik?

Erik: Antall dobles jo for hver gang, det mønsteret vil vel, det vil vare i evig tid, at det vil dobles, det forrige tallet vil dobles til neste osv. osv., så til slutt vil du komme på, ja jeg vet ikke, det er umulig, uendelig … egentlig.

Her diskuterer elevene viktige matematiske ideer – divisjon med 0 og grenseverdier, som gjerne er et tema først på universitetskurs. Deres resonnering er intuitiv, ut fra den gitte konteksten, og viser hvordan elevene kan tenke abstrakt om generelle sammenhenger og søke etter kritiske tilfeller som kan være moteksempler.

Halvering og dobling

Læreren Maren ønsker å diskutere halvering og dobling i multiplikasjon med sine elever på 5. trinn. Målet for økta er resonnering omring et uendelig antall eksempler og sammenhengen «hvis den ene faktoren halveres og den andre dobles, er produktet uendret.» Maren begynner diskusjonen med å spørre om regnestykkene $8 \cdot 25$ og $4 \cdot 50$ har samme svar. Etter hvert foreslår elevene å se på $8 \cdot 25$ som 8 klinkekuleposer med 25 i hver, og $4 \cdot 25$ som 4 klinkekuleposer med 50 i hver. Elevene *resonnerer omkring enkelteksemplet* $8 \cdot 25 = 4 \cdot 50$ med utgangspunkt i regnefortellingen og tegningen.



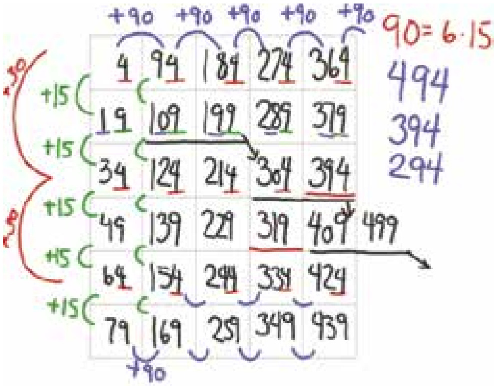
Videre spør læreren om $244 \cdot 23$ og $122 \cdot 46$ har same svar. Tallene er valgt ut med tanke at de ikke er «pene» på noe vis, og målet er bruke dette eksemplet som generisk i et *resonnement som omhandler et uendelig antall eksempler*, vise at sammenhengen gjelder i multiplikasjon med alle naturlige tall. Eksemplet drøftes på samme måte som det første, uten at det generelle diskuteres eksplisitt. Man kan si at eksemplet som var ment å brukes som et generisk eksempel, ble brukt bare som et nytt enkelteksempel. Dette er et kritisk moment knyttet til bruk av generiske eksempler som ofte observeres i matematikklasserom.

Fire kort

I et spill får to personer, A og B, fire kort som har verdi 1–4. To kort trekkes tilfeldig. Hvis summen av verdiene er et partall, vinner A, hvis det er et oddetall, vinner B. Elevene på 6. trinn har fått i oppgave å vurdere om spillet er rettferdig eller ikke. Hvis ikke skal de finne ut hva som kan endres slik at det blir rettferdig. Elevene i en av gruppene skriver opp alle mulige trekk og kommer med følgende resonnement: «Da er det to som blir partall og fire som går an å ha oddetall, så da var det mest sannsynlig og … ja veldig sannsynlig at B vant for at han hadde oddetallene.» Videre prøver de å bytte ut kort slik at de har tre oddetall og ett partall, og elevene skriver systematisk opp alle mulige kombinasjoner. De teller opp kombinasjoner med oddetall og kombinasjoner med partall og får seks av hver og konkluderer at spillet blir rettferdig. Her *resonnerer elevene omkring et endelig antall eksempler* og baserer sitt resonnement på systematisk utprøving av alle muligheter.

Telle med 15 fra 4

Aktiviteten med å telle i kor kan være et fint utgangspunkt for resonnering. Læreren skriver tellingen på tavla i form av en tabell, spør elevene om de ser noen mønster, og merker forslagene i tabellen. Vi ser her er en tabell fra tellingen med 15 fra 4 fra 5. trinn:



Elevene *observerer mønstrene* og *resonnerer omkring enkelteksemplene* (for eksempel at det er en økning på 90 fra første tall i første kolonne til første tall i andre kolonne) eller på *et endelig antall eksempler* (at siste siffer i alle tall i første rad er 4). Læreren kan lede diskusjonen videre til resonnering om hvorfor mønstrene oppstår, og om de vil fortsette om vi teller videre så lenge vi vil. Dermed kan diskusjonen dreies mot begrunnelse og *resonnering omkring et uendelig antall eksempler.*

Noter

1 Kategoriseringen i Stylianides og Ball (2008) omhandler først og fremst bevis, og den tilpasses i denne artikkelen til å gjelde resonnering mer generelt.

(fortsettes side 54)

(fortsatt fra side 51)

2 Eksemplene fra praksis er utviklet innen prosjektet «Mestre Ambisiøs Matematikkundervisning» ved Matematikksenteret, og filmene eksemplene er hentet fra, er lagt ut på: www.matematikksenteret.no/content/4793/Innholdsside. Aktivitetene er fra filmene med tilsvarende overskrift. På siden kan det også leses mer om de ulike typene aktiviteter som diskuteres her.

Referanser

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. I D. Pimm (Red.), *Mathematics, teachers and children* (s. 216–235). London: Hodder & Stroughton in association with Open University.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics. Cognitively guided instruction.* Portsmouth, N.H.: Heinemann.

Enge, O., & Valenta, A. (2011) Argumentasjon og regnestrategier. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, (22)*4, 27–32 .

Hovik, E. K., & Solem, I. H. (2013). Argumentasjon, begrunnelse og bevis på barnetrinnet. I I. Pareliussen, B. B. Moen, A. Reinertsen, & T. Solhaug (Red.), *FoU i Praksis 2012 conference proceedings* (s. 120–126). Trondheim: Akademika forlag.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Red.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics.* J. Washington, National Research Council. DC: National Academy Press.

Schifter, D. (2009). Representation-based proof in the elementary grades. I D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Red.), *Teaching and Learning Proofs across the grades* (s. 71–86). New York: Routledge.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education*, 38, 289–321.

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 307–332.

Valenta, A. (2016a). Tallforståelse – begrepsmessig forståelse. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, (27)*1, 10–16.

Valenta, A. (2016b). Tallforståelse – beregning. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 27*(2), 42–48.