Jensen, Svorkmo

Flervalgsoppgaver

Mange av oss kjenner flervalgsoppgaver fra tester som nasjonale prøver eller konkurranser som Kengurukonkurransen og Abelkonkurransen. I en test eller konkurranse gjelder det bare å velge det riktige svaret, og så er man ferdig med oppgaven. Vi finner sjelden slike oppgaver i lærebøkene, noe vi undrer oss over, for de kan også brukes i undervisningen. Flervalgsoppgaver kan på lik linje med mange andre oppgaver gi muligheter for et læringsarbeid der vi søker å skape god forståelse av matematiske begreper, ideer, sammenhenger eller forhold. Men flervalgsoppgavene har noe som de andre ikke oppgavene har, og det er svaralternativer. Svaralternativene kan enten brukes i forkant av løsningsprosessen, de kan brukes i prosessen, for å sammenligne med egen løsning, eller i etterkant kan svaralternativene brukes til å utvide oppgaven.

Det er prosessen som læreren forbereder og gjennomfører, som avgjør om oppgaven blir en avkrysningsoppgave eller en utforskende oppgave. Det må være rom for samarbeid og diskusjon hvor ulike løsninger blir presentert, og i fellesskap kan man reflektere rundt løsningene. Underveis i arbeidet kan elever trenge veiledning. Ved å være forberedt på de ulike løsningsstrategiene som elevene kan komme til å velge, kan læreren veilede med utgangspunkt i det elevene selv har tenkt. Hvis elevene løser oppgavene på forskjellige måter, er det en flott anledning til å se at ulike metoder og representasjoner kan brukes. Det å kjenne ulike representasjoner og sammenhengen mellom dem er et av kjennetegnene på dybdelæring i matematikk.

Nedenfor viser vi to eksempler på flervalgsoppgaver og hvordan vi kan tenke oss å bruke dem i undervisningen. Vi ønsker å vise hvordan arbeid med flervalgsoppgaver kan hjelpe elevene til å trenge dypere ned i fagstoffet Vi vil utnytte det at flere svaralternativ er oppgitt, og at ett av dem er det riktige. Dette gir mulighet for en annen type arbeid enn «vanlig oppgaveløsning» ved at vi kan bruke svaralternativene på ulike måter.

I det første eksempelet har vi valgt en geometrioppgave som kan løses på mange forskjellige måter og med ulike representasjoner. Den gir muligheter til å se sammenhenger mellom representasjonene. Oppgaven kan løses på mange nivåer, og den kan være et utgangspunkt for nye undersøkelser.

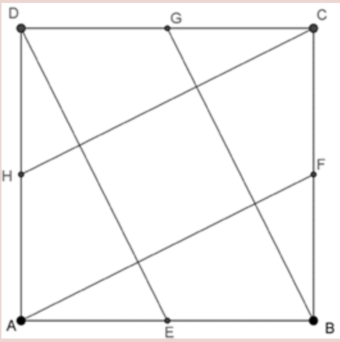
Anne-Mari Jensen
Matematikksenteret
anne-mari.jensen@matematikksenteret.no

Anne-Gunn Svorkmo
Matematikksenteret
anne-gunn.svorkmo@matematikksenteret.no

I det andre eksempelet ser vi på sammenhenger og likheter mellom tre oppgaver som alle handler om delelighet. De tre oppgavene skal, under god veiledning og tilrettelegging, til sammen utfylle, utfordre og gi mulighet til utvikling av elevers forståelse.

Oppgave 1: Kvadrat i kvadrat

Oppgave



Et kvadrat ABCD med sidelengde 1 er gitt. Punktene E, F, G og H ligger midt på hver sin sidekant, slik figuren viser. Linjene AF, BG, CH og DE trekkes. Da dannes det et kvadrat inne i figuren.

Hva er forholdet mellom arealet av det lille og det store kvadratet?

A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4 D) 1/5 E) 1/6

Hva handler oppgaven om?

Den første utfordringen er å lese teksten og få oversikt over all informasjon som er gitt, og å forstå hva spørsmålet betyr. Hvis klassen har startproblemer, kan det være lurt å snakke i fellesskap om dette. Hva menes med forholdet mellom to arealer? Hvilke arealer dreier det seg om? Det kan være en idé å markere eller fargelegge det lille kvadratet.

Hvordan kan vi bruke svaralternativene?

En strategi er å vurdere svaralternativene før løsningen: Er det noen som åpenbart må være feil? Kan man snevre inn antall mulige løsninger? La elevene begrunne hvilke alternativer de ser som sannsynlige løsninger. Kanskje de kan gjette på en løsning før de arbeider videre, så blir det spennende å sammenligne gjetningen med resultatet.

Å finne løsningen

For å komme fram til en løsning kan man arbeide geometrisk eller regne ut arealer. Elevene kan velge å løse oppgaven ved å tenke seg at biter av figuren flyttes og settes sammen på nye måter. Hvis det er vanskelig å se for seg, kan de klippe opp figuren langs linjene og pusle dem sammen igjen. De må prøve å finne en måte å sette bitene sammen på slik at størrelsesforholdet blir tydelig. Læreren kan også forberede noen modeller som elevene kan arbeide med, de kan lages ulikt etter hvilket trinn og nivå elevene er på. Hvis de vil beregne arealer, må de med utgangspunkt i at $AB = 1$ se at alle sidene er halvert, og de må kjenne arealet av kvadratet *ABCD*. De må dessuten kunne bruke formlike trekanter i utregningene. Det fins flere måter å resonnere og regne på enn de eksemplene vi viser nedenfor.

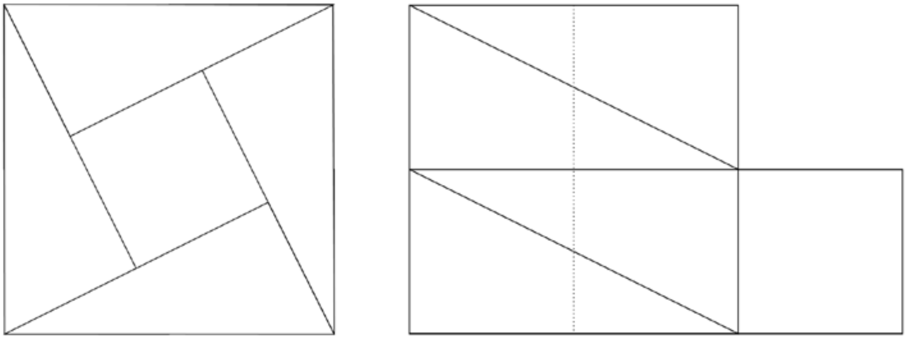
Geometriske løsninger

Eksempel 1

Det enkleste er hvis figuren klippes opp etter linjene som på figur 1. De fire trekantene kan legges sammen slik at man kan se at de er fire ganger større enn det lille kvadratet i midten. Gi elevene delene slik de ligger i figuren til venstre, og be dem pusle sammen bitene slik at det blir tydelig hvor stor del det indre kvadratet utgjør av hele arealet. Siden de vet at ett av svaralternativene er riktig, er det lett å se at alternativ D må stemme.

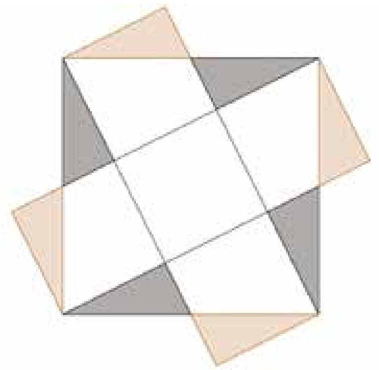
Eksempel 2

Hvis man klipper opp figuren etter alle linjene, blir puslespillet litt vanskeligere. Man kan ende opp med samme resultat som i figur 1, eller

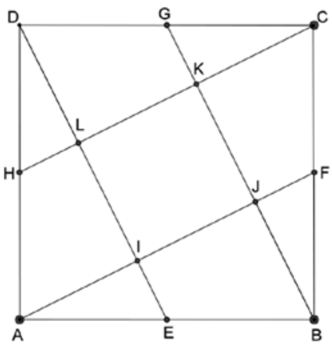


Figur 1

man kan tenke seg at man bare flytter de fire minste (grå) trekantene slik at man får et kors som består av fem like store kvadrater (figur 2).



Figur 2



Figur 3

Også her kan man støtte seg til svaralternativene, ett av dem er riktig. På et høyere trinn kan man i tillegg be elevene forklare at de fire firkantene som dannes i «korset» i figur 2, faktisk er kvadrater med samme areal som kvadratet i midten.

Løsning ved regning

Eksempel 1

Arealet av det indre kvadratet kan regnes ut på flere måter. Vi kan trenge å sette navn på flere punkter i figuren, se figur 3, og vi må bruke egenskapene til de formlike trekantene i figuren.

Vi kan finne arealet av kvadratet i midten ved å finne IJ og deretter IJ^2:

$$AF = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ΔABF, ΔAJB og ΔAIE er formlike, og ΔAIE og ΔBJF er kongruente. Trekantene er rettvinklede, og lille katet = $1/2 \cdot$ store katet. I ΔABJ er $BJ = 1/2\ AJ$. $BJ = AI$ (ettersom ΔAIE og ΔBJF er kongruente). Da må $AI = 1/2\ AJ = IJ$. $JF = 1/2\ BJ = 1/2\ IJ$, så

$$IJ = \frac{2}{5}AF = \frac{2}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Arealet av kvadrat i midten: $IJ^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$

Eksempel 2

En annen måte er først å finne arealet som ligger utenfor kvadratet i midten.

Denne løsningen henger nært sammen med eksempel 1 under geometriske løsninger. Hvis man først har klipt opp figuren, ser man at trekantene som omgir kvadratet i midten, er kongruente rettvinklede trekanter. Den korteste kateten er like lang som siden i det indre kvadratet (strengt talt må dette vises), og den lengste er dobbelt så lang. Vi kan kalle sidelengden til det lille kvadratet for a og arealet a^2. Arealet til de fire trekantene blir da til sammen $4 \cdot \frac{a \cdot 2a}{2} = 4a^2$, det vil si at det som ligger utenfor det lille kvadratet, har fire ganger så stort areal som dette kvadratet.

Hvis man ikke har klipt opp figuren, er det ikke så tydelig at trekantenes lille katet er like lang som kvadratets side. Da må det litt mer regning og resonnering til:

ΔABJ, ΔBCK, ΔCDL og ΔDAI er kongruente. ΔABJ er formlik med ΔAEI og $AE = 1/2\,AB$. Dette medfører at Areal ΔAEI = 1/4 Areal ΔABJ.

Areal ΔAEI = Areal ΔBFJ, så

$$\text{Areal } \Delta ABJ = \frac{4}{5} \text{Areal } \Delta ABF$$

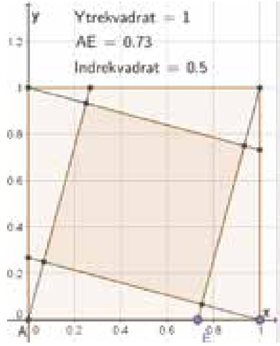
$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{AB \cdot BF}{2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{5}$$

Areal av kvadratet $IJKL$ = 1 – 4 · Areal ΔABJ = 1 – 4 · 1/5 = 1/5.

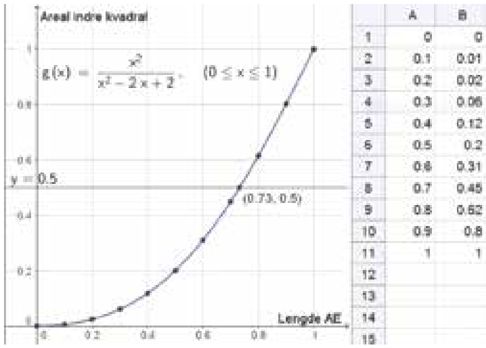
Videre utforskning

Vi kan utvide oppgaven ved å utnytte alle svaralternativene. Vi kan for eksempel spørre om hvor punktet E måtte vært plassert på AB for at de «gale» svaralternativene skulle ha vært oppfylt. Man kan lage en dynamisk figur i GeoGebra hvor det ytre kvadratet er plassert slik figur 4 viser, og ved å markere kvadratet inni som Mangekant, får man fram arealet av dette.

Man kan bevege punktet E langs AB og legge lengden AE og arealet av det indre kvadratet inn i et regneark, og man kan få disse registreringene ut som punkter i grafikkfeltet.



Figur 4



Figur 5

Det er ingen ferdigprogrammerte regresjonsfunksjoner i GeoGebra som vil passe. En oppgave kan være å finne den funksjonen som passer til disse punktene. Figur 5 viser funksjonsuttrykket.

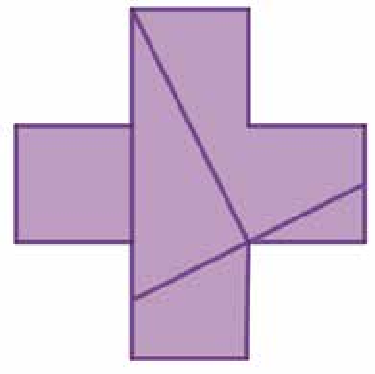
Til høyre i figur 5 ser vi spesielt hvordan vi kan finne ut hvor punktet E må ligge dersom arealet av det indre kvadratet skal være halvparten av det ytre.

Lag en pusleoppgave

Puslespillet i figur 6 er beslektet med oppgaven ovenfor. Korset skal klippes opp som vist på figuren. Lag et kvadrat av bitene!

Gangen i arbeidet

Det er viktig at læreren på forhånd har tenkt igjennom hvilke mulige løsninger problemet kan ha. Læreren må være forberedt på at veiledningen blir forskjellig etter hvilket nivå elevene er på, og etter hvilken innfallsvinkel de har valgt



Figur 6

å bruke. Veiledningen skal hjelpe elevene til å forstå og se løsninger selv, og man må unngå at veiledningen blir en forklaring av løsningen. Hvis mange blir stående fast, kan det være en idé å stanse underveis og ha en felles samtale. Når arbeidet er avsluttet, er det tid for refleksjon og samtale i hele klassen. Noen av elevene må presentere løsninger slik at alle får se de ulike måtene å regne og resonnere på. Rekkefølgen av presentasjonene er viktig, man bør på forhånd planlegge slik at man får tydeliggjort sammenhengene mellom de ulike løsningene og representasjonene. På denne måten får elevene se at et problem kan løses med ulike representasjoner, og at det man har gjort geometrisk eller ved regning, faktisk handler om det samme. Man kan også diskutere om noen løsninger er enklere eller mer effektive enn andre.

Oppgave 2: Delelighet på mange måter

Å løse et lite oppgavesett med oppgaver som er hentet fra ett og samme emne i matematikk, men hvor oppgavene har ulik innfallsvinkel og tilnærming til emnet, gir muligheter til å løfte fram og peke på sammenhenger, samt å diskutere faglige likheter og ulikheter oppgavene imellom. På veien mot en helhetlig matematisk kompetanse ønsker vi som lærere at elever i større grad skal se sammenhenger i faget. Ved å jobbe med et lite oppgavesett kan elever under veiledning av lærer selv få muligheter til å erfare og oppdage sammenhenger. Målet er at elever skal kunne kjenne igjen de samme strukturene i flere oppgaver og kunne gjøre seg nytte av de matematiske sammenhengene. Det handler om en kompetanse som går ut på å kunne avdekke og kjenne igjen den matematiske ideen en oppgave bygger på, uansett hvordan godt og på hvilken måte den er innpakket. Når ideen er gjenkjent, er det å løse oppgaven mer overkommelig. I mange sammenhenger bygger ideen i en oppgave på basisferdigheter som for eksempel grunnleggende tallkunnskap, de fire regneartene eller geometriske former og egenskaper ved disse. Hvor langt elevene kommer på denne veien, og hvor dypt de kommer inn i det faglige, er avhengig av prosessene som læreren styrer og legger til rette for i klasserommet.

I vårt eksempel på neste side har vi valgt ut tre oppgaver fra Kengurukonkurransen som handler om delelighet, men deleligheten er satt inn i ulike kontekster. En oppgave handler om noen jenters favorittall, en om et femsifret tall og en om alderen til fem søstre. Vi vil ikke vise eksempler på hvordan disse oppgavene kan løses, men komme med forslag til spørsmål læreren kan stille underveis, og hvordan oppgavene kan utvides ved å bruke svaralternativene.

Oppgavene i det lille oppgavesettet kan deles ut en om gangen, eller elevene kan få alle samtidig. Det er avhengig av elevenes forkunnskaper. I det første tilfellet kan læreren bestemme rekkefølgen på oppgavene. I det andre tilfellet kan elevene selv få velge hvilken oppgave de ønsker å starte med. Uansett om elevene får en om gangen eller flere samtidig, bør læreren med jevne mellomrom stoppe opp og stille gode spørsmål som løfter fram de faglige sammenhengene. Han kan få elevene til å forklare, resonnere og peke på likheter og forskjeller i oppgavene. Dersom elevene ikke oppdager det selv, bør de oppmuntres til å vurdere om noe av det de har erfart i én oppgave, kan brukes i flere.

Oppgave 1 (Benjamin oppg. 23, 2017)

Tre jenter har sine favorittall. Anna liker partall, Birgitta liker tall som er delelig med 3 og Celina liker tall som er delelig med 5. På et bord ligger det åtte lapper med jentenes favorittall. Først går en av jentene og henter alle lappene med sine favorittall. Deretter går neste jente og henter sine favorittall blant lappene som er igjen. Til slutt henter den siste jenta sine favorittall.
Anna tok lapper med tallene 32 og 52, Birgitta tok de med tallene 24, 33 og 45 og Celina tok lapper med tallene 20, 25 og 35.

I hvilken rekkefølge gikk jentene til bordet?

A) Birgitta, Anna, Celina
B) Celina, Birgitta, Anna
C) Birgitta, Celina, Anna
D) Anna, Celina, Birgitta
E) Celina, Anna, Birgitta

Oppgave 2 (Benjamin oppg. 24, 2011)

Et femsifret tall skal bestå av sifrene 1, 2, 3, 4 og 5 i en eller annen rekkefølge.

- Første siffer er delelig med 1.
- De to første sifrene danner et tall som er delelig med 2.
- De tre første sifrene danner et tall som er delelig med 3.
- De fire første sifrene danner et tall som er delelig med 4, og hele tallet er delelig med 5.

Hvor mange slike tall finnes?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) 10

Oppgave 3 (Cadet oppg. 14, 2016)

Astrid, Berit og Carola er trillinger. Deres tvillingsøstre Dagny og Eva er 3 år yngre.

Hvilket av følgende alternativer kan være summen av alderen til de fem barna?

A) 36 B) 53 C) 76 D) 89 E) 92

Oppstart

Før elevene begynner å jobbe med oppgavene, kan en samtale i samlet gruppe om delelighet være en fin måte å starte på. Læreren kan for eksempel stille spørsmål om hva delelighet er, og hvordan man kan vite om et tall er delelig med 2 eller 5. Elevene kan komme med eksempler, og læreren følger opp med spørsmål som utfordrer elevenes forklaringer. Hvordan kan vi være sikre på at et tall er delelig med 5 bare ved å se på det siste sifferet? Det faglige innholdet i starten på denne samtalen er rettet mot det vi kan kalle grunnkunnskaper om delelighet. De oppgavene vi har valgt ut, krever at elevene kan kombinere denne grunnkunnskapen på ulike måter. Hva er det med tall som både er delelig med 2 og 3? Finnes det tall som er delelig med både 3 og 5? Hva kjennetegner disse tallene? Læreren er forberedt på å utfylle elevenes forklaringer og eksempler slik at de lettere kan komme i gang med oppgavene. Balansen er hårfin mellom det å stille spørsmål som får elevene til å tenke, og spørsmål som avslører for mye av det de skal finne ut selv. Det å vite hvordan man kan finne ut om et tall er delelig med 4 bare ved å se på de to siste sifrene, kan være ukjent kunnskap for flere elever. Om det skal løftes fram før oppgaveløsningen eller underveis, må læreren ta stilling til. Vi ser for oss at det kan være fint å stoppe opp når elevene er kommet godt i gang med oppgavene, for å diskutere dette i fellesskap.

Elevene løser oppgavene

Elevene løser oppgavene i par eller i små grupper. Å løfte fram og synliggjøre de faglige sammenhengene i og mellom oppgavene er ett av målene våre. Slik vi ser det, er det best å gjøre det når elevene har kommet i gang med arbeidet. Læreren samler elevene når han ser at det kan passe, og vi mener det er bedre med små, korte samtaler enn én lang. Da vil elevene etter avbrytelsen lett kunne finne tilbake til oppgavene de holder på med. Å få elevene til å forklare hva de enkelte oppgavene går ut på, og hvilken fagkunnskap det spørres etter, kan følges opp med å spørre om det er noe som er felles for de tre oppgavene. I oppgave 1 spørres det etter tall som er delelig med 2, 3 og 5, i oppgave 2 spørres det etter tall som er delelig med 1, 2, 3, 4 og 5. Når det gjelder alderen til de fem søstrene i oppgave 3, spørres det etter tall som er delelig med 2 eller 3, men det er underforstått. Det er viktig å løfte fram at tall kan ha flere faktorer i seg, og at forskjellige tall kan ha felles faktorer.

De tre oppgavene kan løses på ulike måter. Hvis ikke elevene kommer på det selv, kan læreren tipse om at oppgave 1 er fin å simulere. Elevene kan skrive jentenes favorittall på lapper og trekke lappene etter tur. De kan bruke svaralternativene, og dersom de starter med alternativ A, vil de kanskje allerede etter første simulering se rekkefølgen. Sifrene i oppgave 2 er fin å skrive på post-it-lapper, for da kan sifrene i det femsifrede tallet flyttes rundt. Oppgave 3 kan løses på flere måter enten ved å bruke problemløsingsstrategiene gjett og sjekk eller ved å lage en tabell. Den kan også løses algebraisk.

Læreren kan også be elevene å stille spørsmål de har til oppgavene i plenum, og kanskje noen grupper har gode råd som de kan dele med de andre.

Presentasjon og oppsummering

Mens elevene løser oppgaver, går læreren rundt og observerer. Han ser etter ulike måter som elevene løser oppgavene på, velger ut noen og bestemmer i hvilken rekkefølge elevene skal presentere løsningene sine for hverandre. Faglige sammenhenger, likheter og forskjeller mellom oppgavene er kanskje enda tydeligere etter at elevene har løst oppgavene og presentert sine løsninger. Da kan læreren utfordre elevene til forklare og uttrykke sammenhenger på andre måter enn det de tidligere har gjort i prosessen.

Utvidelse av oppgavene ved bruk av svaralternativer

Flervalgsoppgaver har en mulighet som oppgaver uten svaralternativer ikke har. Svaralternativene kan brukes i læringsprosessen. Etter at elevene har arbeidet med oppgavene, kan læreren sammen med elevene bruke svaralternativene til å utvide en eller flere av oppgavene. For eksempel kan spørsmål av typen «hva hvis …» eller «hva hvis ikke …» stilles. Her er noen forslag.

Vi vil bruke svaralternativene og spørre:

- I oppgave 1, hva hvis alternativ E hadde vært det riktige svaret? Hvilke tall hadde da de tre jentene trukket? Hvem ville fått flest lapper? Finnes det en rekkefølge å trekke lappene i slik at ei av jentene ikke får noen?
- I oppgave 2, hva hvis svaralternativ 1 eller 2 er det riktige alternativet? Hvordan må teksten i oppgaven endres for å få det til?
- I oppgave 3, hva hvis alle svaralternativene i oppgaven skal endres? Hvilke andre svaralternativer kan brukes? Kun ett alternativ skal være riktig. Hvis det i teksten føyes til at trillingene studerer på universitetet, må svaralternativene tilpasses den opplysningen. Svaralternativene må være helt annerledes dersom det føyes til i teksten at trillingene snart skal gå av med pensjon!

(fortsettes side 25)

(fortsatt fra side 14)

Flere gode flervalgsoppgaver

På Matematikksenterets hjemmeside ligger det mange flervalgsoppgaver av denne typen under overskriften «Temabaserte problemløsningsoppgaver». Disse er her sortert etter matematiske temaer. Oppgavene har vi hentet fra Kengurukonkurransen og Abelkonkurransen, for her finnes det mange gode oppgaver som kan brukes på nytt og da på andre måter enn i selve konkurransen. Det finnes oppgavesett både for mellomtrinnet/ungdomstrinnet og for videregående skole, men mange av oppgavene kan passe på alle nivåer. Her er det kopieringsoriginaler med oppgaver til elevene og en veiledning til læreren med forslag til gode spørsmål som kan stilles til elevene under arbeidet. Målet er å veilede på en slik måte at eleven til slutt kjenner at løsningen var hans/hennes egen.