Ligningssett i kontekst

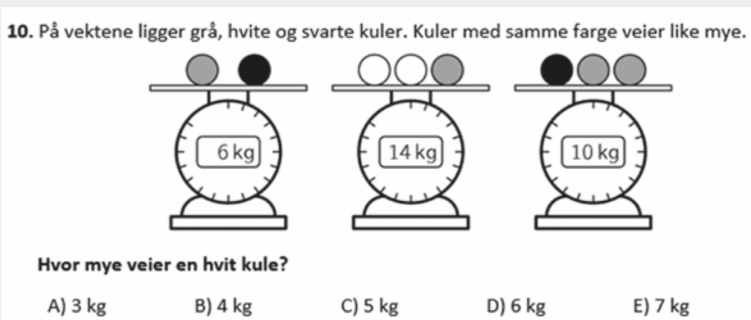
Anne-Gunn Svorkmo, universitetslektor ved Matematikksenteret NTNU

Det finnes likehetstrekk mellom noen av oppgavene i Kengurukonkurransen. I enkelte oppgaver brukes terninger på en eller annen måte, andre har tallkort eller pusselbrikker som et felles element. Oppgaver med skålvekter eller kjøkkenvekter, er likhetstrekket mellom de oppgavene jeg her vil se nærmere på. Hvis kjøkkenvekter er med, spørres det ofte etter verdien til ett av objektene. I skålvektoppgaver handler det om vekter i balanse, vekter som ikke er i balanse eller en blanding av de to. Bak et logisk resonnement som bygger på hvilke objekter som veier like mye, eller hvilke som veier mer eller mindre enn andre, ligger løsningen. Uansett, i denne type oppgaver er det én gylden regel; objekter med samme form eller samme farge, står for samme verdi.

Jeg ønsker å trekke fram noen problemløsningsstrategier jeg mener er spesielle for denne type oppgaver. Strategien «gjett og sjekk» er ikke blant disse, men jeg vil likevel nevne at strategien kan fungere godt på mange av de enkleste oppgavene. Elever som er ukjent med oppgavetypen, men som har brukt «gjett og sjekk» som framgangsmåte i andre sammenhenger, tar ofte denne strategien i bruk. Mange klarer på denne måten å komme fram til riktig løsning. «Prøve og feile» brukt på en systematisk måte, kan også være en effektiv strategi. Strategien er generell og kan brukes på mange typer problemløsningsoppgaver, men er ikke blant de jeg vil kalle spesiell for oppgavetypen jeg har valgt å se nærmere på.

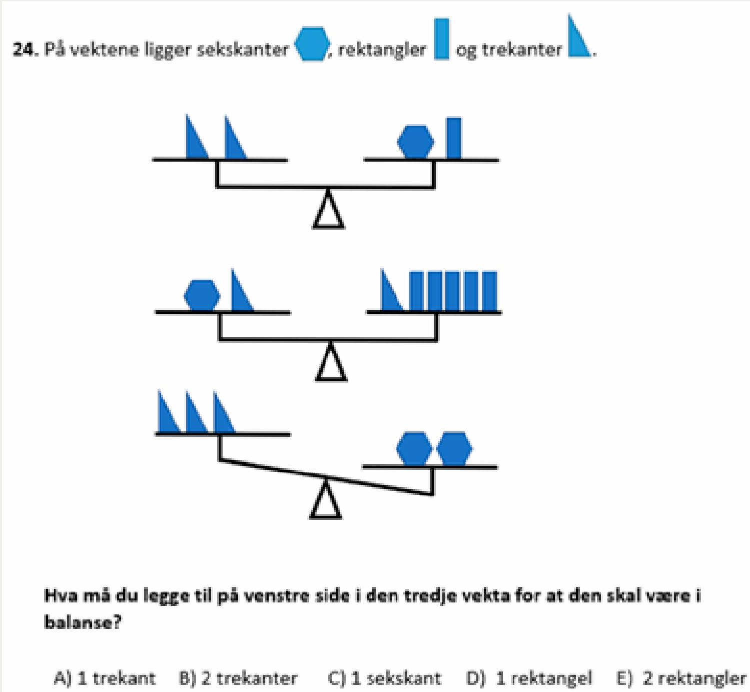
Oppgaver med vekter eller skålvekter er egentlig ligningssett satt inn i en kontekst. Jeg vil vise eksempel på hvordan en av vektoppgavene kan representeres i form av et ligningssett. I denne fagteksten konsentrerer jeg meg mer om problemløsningsstrategier, og min intensjon er at elever fra 4. trinn og oppover kan arbeide med ligningssett i kontekst, uten å vite noe om ligninger. Men når elevene kommer på ungdomstrinnet skal oppøve sin kompetanse i det å *kunne lage, løse og forklare ligningssett knyttet til praktiske situasjoner,* kan erfaringer fra oppgaver de tidligere har arbeidet med å gjøre det enklere å se sammenhengen, og hvordan det kan representeres med ligninger.

I oppgavene nedenfor ligger de fleste opplysningene som trengs for å komme fram til løsningen, i bildene. Elevene må studere bildene for å få tak i informasjon de kan resonnere videre ut ifra. Et innledende spørsmål som kan hjelpe dem med å vite hva de skal se etter i bildene, kan være: Hva er likt, og hva er forskjellig? Ved å undersøke bildene i oppgaven får elevene vite hva som veier det samme, hva som veier mer eller mindre enn noe annet. Deretter må elevene sortere opplysningene de har innhentet; noen kan være viktigere enn andre, mens noen av dem bygger på hverandre. Ofte er det i en opplysning nøkkelen til løsningen ligger, og det er her de spesielle problemløsningsstrategiene kan være nyttige å kjenne til.



Eksempel 1

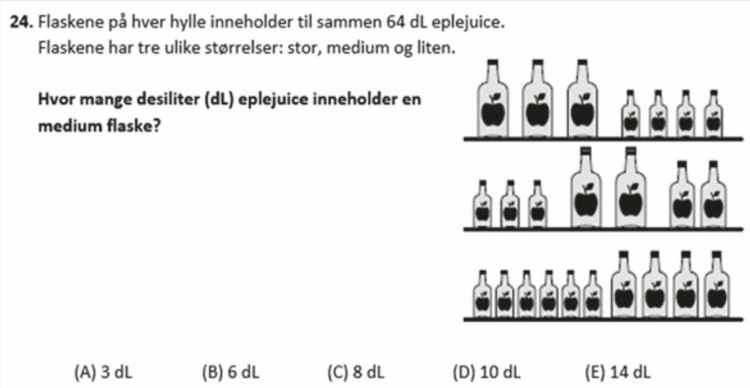
Hvis jeg i oppgaven ovenfor vet hvor mye ei grå kule veier, blir det enkelt å finne ut hvor mye ei hvit kule veier. Denne informasjonen får jeg ved å studere vekta i midten. Jeg må gå via ei grå kule for å finne vekta på ei hvit kule, og ei hvit kule er kun med på det midterste bildet. Den første og siste vekta har noe til felles, og det er at begge vektene inneholder grå og svarte kuler. Forskjellen mellom de to vektene er ei grå kule og differansen er 4 kg, og da må ei grå kule veie 4 kg. Denne informasjonen kan jeg da bruke for å finne ut hvor mye ei hvit kule som ligger på den midterste vekta veier. To hvite kuler veier til sammen 10 kg, altså 5 kg hver. Dette er en framgangsmåte blant flere, og det å finne forskjellen mellom to vekter, er en spesiell problemløsningsstrategi for slike oppgaver. Hvilke to vekter som kan gi nyttig informasjon ved sammenligning, må eleven finne ut av. Det er kun tre kombinasjonsmuligheter når det er tre vekter. Innledningsspørsmålet som jeg nevnte tidligere, hva er likt og hva er forskjellig, kan være til hjelp. Elever som har løst oppgaven i eksempel 1 (opprinnelig er beregnet for elever på 4. og 5. trinn), er kanskje ikke klar over at de har løst et ligningssett med tre ukjente. Oppgaven kan også representeres som et ligningssett med tre ukjente: $x + y = 6$, $2z + x = 14$ og $2x + y = 10$, og løses på samme måte som beskrevet ovenfor.



Eksempel 2

Likevektprinsippet og det å forstå hvorfor det er mulig å subtrahere eller addere samme tall på begge sider av likhetstegnet, blir ofte illustrert ved hjelp av ei skålvekt. De elevene som ikke kjenner til likevektprinsippet og hvordan det kan utnyttes i denne sammenhengen, vil ha problemer med å komme i gang med en slik oppgave. Det gjelder spesielt i oppgaver hvor denne strategien er den mest effektive og kanskje den eneste som kan lede mot en løsning.

Nøkkelen i oppgaven i eksempel 2, slik jeg ser det, ligger i akkurat det å finne objektet som kan fjernes på begge sider av ei av vektene. Jeg studerer de to øverste bildene hvor begge vektene er i balanse, og ser at på den midterste vekta, ligger en trekant både på høyre og venstre side av skålvekta. Likevekta opprettholdes selv om trekanten fjernes på begge sider. Da finner jeg ut at en sekskant veier det samme som fem rektangler. Denne informasjonen kan jeg bruke i den øverste vekta og kan resonnere meg fram til at to trekanter veier det samme som fem rektangler. Halverer jeg antall trekanter og antall rektangler, vet jeg at en trekant veier det samme som tre rektangler. I den nederste vekta hvor vekta ikke er i balanse, kan jeg se at tre trekanter veier mindre enn to sekskanter. Det er fordi tre trekanter veier like mye som ni rektangler mens to sekskanter veier det samme som ti rektangler.



Eksempel 3

Den nederste vekta vil være i balanse dersom jeg legger et rektangel på skåla til venstre.

Oppgaven i eksempel 2 ble plassert sist i oppgavesettet Ecolier i Kengurukonkurransen 2021, fordi den ble vurdert som utfordrende for elever på 4.–5. trinn. Av de elevene som i etterkant av Kengurukonkurransen registrerte sine resultater på våre nettsider, hadde 15 % av elevene på 4. trinn og 25 % av elevene på 5. trinn løst oppgaven riktig.

Ved første øyekast ligner oppgaven i eksempel 3 ikke på en skålvekt-oppgave. Den har en annen kontekst, men har noen matematiske likheter med de to andre oppgavene. Ettersom hver hylle inneholder like mye eplesaft, vil vi også her kunne bruke likevektprinsippet ut fra volum med eplesaft. Av de som har registrert resultatene, hadde 30 % av elevene på 8. trinn valgt riktig svaralternativ. Det er sjelden at så mange har svart riktig på den siste oppgaven i et oppgavesett. Jeg vil tro at flesteparten av elevene løste oppgaven ved hjelp av strategien «gjett og sjekk», og da er den kanskje ikke så vanskelig som vi trodde da oppgavesettet ble laget. Hvordan ville du ha gått fram for å løse oppgaven nedenfor? Hvilken strategi ville du brukt? Løs den gjerne selv før du leser videre.

En måte å løse oppgaven på er å halvere antall flasker på ei av hyllene, og det er bare ei hylle hvor det er mulig hvis ikke jeg skal operere med halve flasker. Dersom jeg tar halvparten av flaskene på den nederste hylla (det vil si tre små flasker og to medium flasker), vet jeg at de inneholder til sammen 32 dl eplesaft. Den samme gruppe flasker står på den midterste hylla, og forskjellen mellom innholdet på de to hyllene er to store flasker som til sammen inneholder 32 dl eplesaft. Når jeg vet at ei stor flaske inneholder 16 dl eplesaft, har jeg funnet opplysningen som vil lede meg mot løsningen av oppgaven.

En dobling av antall flasker vil fungere på samme måte som en halvering, men da er det den midterste hylla jeg må ta utgangspunkt i. Dersom jeg dobler innholdet på denne hylla, får jeg fire store flasker, fire medium og seks små flasker som til sammen vil inneholde 128 dl eplesaft. Forskjellen mellom flasker og mengde saft på den «doble» hylla og innholdet på den nederste hylla, er fire store flasker og til sammen 64 dl eplesaft. Ut fra denne opplysningen finner jeg hvor mye eplesaft det er i ei stor flaske.

Jeg har vist eksempler på noen strategier jeg mener egner seg godt for problemløsningsoppgaver hvor ligningssett i kontekst er med på en eller annen måte. *Sammenligningsstrategien*, beskrevet i det første eksempelet, går ut på å utnytte at noe er nesten helt likt. Den lille forskjellen det her er snakk om gir viktig informasjon som kan brukes videre i oppgaven. Når elever på ungdomstrinnet skal løse ligningssett, kan det komme til nytte det å trekke ei ligning fra ei anna. Det er også framgangsmåten som bygger på likevektprinsippet hvor det samme objektet kan fjernes fra de to vektene i ei skålvekt. Sammenligner jeg med algebraiske regneuttrykk, gjør jeg det samme når jeg trekker fra like mye på begge sidene av likhetstegnet. *Halvering-dobling strategien* er kanskje den som er minst brukt av de tre blant oppgaver fra Kengururkonkurransen.

Oppgavene ovenfor kan godt løses som ligningssett med tre ukjente. Ved å gjøre oppgaver der dette foregår i en kontekst kan kanskje føre til at overgangen til en ren algebraisk løsning blir mer forståelig for elevene. Oppgavene oppfordrer til logisk tenkning og resonnering og er i så måte en undervisningsressurs for arbeid med matematisk resonnering. Senere, når elever skal arbeide med algebra, så kan slike oppgaver fungere som en brobygger mellom logiske strategier og mer formelle representasjoner. Når elever arbeider med ligningssett i kontekst, må de utforme egne resonnementer ut fra den informasjonen de finner ved å studere bildene i oppgaven. En presentasjon i plenum gjør at elevene må prøve å forstå andre elevers resonnementer for så å sammenligne de med sine egne. Dette er beskrevet i kjerneelementet resonnering og argumentasjon i LK 20; *resonnering handler om å kunne følge, vurdere og forstå matematiske tankerekker*. Videre bør elevene oppfordres til å argumentere for sine resonnement for å bevise at de er riktige.

Resonnementene knyttet til denne type oppgave, kan være både lange og komplekse. Resonnementskompetansen er noe elevene må utvikle over tid.

For å vise mangfoldet blant oppgaver i Kengurukonkurransen, tar jeg med enda en oppgave innenfor samme sjanger (se under). Flere og enklere oppgaver av denne typen finnes på Matematikksenteret.no/kenguru og Matematikk.org/julekalender.