Ludvig: Ni.

Lærer: Ni. [Tegner ni sokker på tavla.] Ok, da skal vi dele inn i par.

Ludvig: Da er det også en til som er ensom.

Lærer: Ok. Nå har jeg tatt to oddetall her. Dere ser at når jeg tegner opp et oddetall og deler inn i par, blir det alltid en ensom sokk til overs. Det ville vært det samme om vi hadde tatt et annet oddetall også. Dersom jeg legger sammen disse to oddetallene. Dersom jeg legger sammen disse sokkene, hva skjer?

Imre: Da blir de ikke ensomme.

Lærer: Trenger de ikke være ensomme, da? Kan ikke den ene sokken her dra dit? [Peker og flytter de ensomme sokkene sammen på tavla.] Dette er viktig matematikk, folkens. Ser dere, altså om man har et hvilket som helst oddetall, så vet vi. Vi har jo lært hva oddetall er. Og at det må alltid være et ensomt tall som ikke kan bli delt inn i par. Så det betyr at hvert eneste oddetall har en ensom sokk. Det betyr at dersom vi legger sammen to oddetall, uansett hvilke oddetall som helst, så vil hvert av de oddetallene ha en ensom. Så alle oddetall har en ensom sokk, eller et ensomt tall. Og dersom vi legger sammen to tall som har en ensom, så kan jo de ensomme tallene finne sammen. (…)

Lasse: Hva om du legger til nå? For nå la du sammen to oddetall, dersom du nå legger til et oddetall til, så blir det en ny ensom.

Illustrasjonen med sokker viser tydelig forskjellen på partall og oddetall. Ved å tegne tallene på denne måten ser man *hvorfor* summen av fem og ni er et partall. Ideen med ensomme sokker som slår seg sammen til par, er overførbar til hvilken som helst sum av to oddetall. Argumentasjonen som klassen utvikler, har dermed kvaliteter av et *generisk eksempel*. Dette er en bevisform som er særlig godt egnet for elever på mellomtrinnet (for mer om generisk eksempel, se for eksempel Arnesen (2022)).

Avslutning

Gjennom utprøving av ulike aktiviteter har vi erfart at å arbeide med argumentasjon har vært inspirerende, men også tidvis frustrerende. For elever som er vant til at matematikk handler om å løse flest mulig oppgaver på kortest mulig tid, kan det oppleves frustrerende at læreren ikke lenger bekrefter rett svar og går videre til neste oppgave, men heller spør om begrunnelser for hvorfor man kan regne på den måten. Etter hvert som elevene blir vant til å bli utfordret på denne måten, kan elevenes syn på hva matematikk handler om, endre seg.

For at elevene skal delta aktivt i matematikk, må de oppleve at de har noe å komme med. Vår erfaring i prosjektet er at oppgaver som legger opp til at man skal se etter mønster, teste ut påstander og argumentere for fremgangsmåter, gjør at flere elever kan nå fram med tenkemåtene de er sterkest på. Noen elever jobber svært systematisk, andre er gode på å oppdage mønster og sammenhenger mellom tall, mens andre igjen tenker mer visuelt. Alle disse strategiene er verdifulle og kan løftes fram av læreren slik at de kan deles i klassen. På denne måten kan alle elever bidra, og oppleve mestring i arbeid med matematikk.

Referanser

Arnesen, K. K. (2022). Generiske eksempler som argumentasjon. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 33*(1), 2–8.

Burheim, O. T., Dahl, H., Enge, O. & Rø, K. (2003). *Alltid, aldri eller noen ganger? – Om matematisk argumentasjon i grunnskolen.* Caspar forlag.

Enge, O. & Valenta, A. (2011). Argumentasjon og regnestrategier. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning, 22*(4), 27–32.

(fortsettes side 34)

Melhus, Fauskanger

Det utfordrende likhetstegnet

I denne artikkelen vil vi diskutere likhetstegnet – både elevers forståelse av tegnet og anbefalinger for undervisning. Diskusjonen vil delvis knyttes til episoden i rammen til høyre[1].

Elevers forståelse for likhetstegnet og mulige årsaker

Mange elever har en operasjonell forståelse av likhetstegnet og oppfatter tegnet som et signal om enten å «skrive svaret» eller å «gjøre noe» (Behr et al., 1980; Kieran, 1981). Denne typen forståelse vil gi riktig svar på oppgaver som $8 + 15 =$ __, men fører ofte til feil svar stilt overfor oppgaver som $8 + 15 =$ __ $+ 9$. Det typiske er at eleven skriver enten 23 eller 32 på den tomme linja. De som skriver 23, overser 9-tallet til høyre og skriver summen av 8 og 15 på linja. De som skriver 32, ser at regneoperasjonen er addisjon, og legger sammen alle tallene som er oppgitt i oppgaven. Noen velger å «utvide oppgaven» (Carpenter et al., 2003) og skriver $8 + 15 = 23 + 9 = 32$.

Kjersti Melhus
Universitetet i Stavanger
kjersti.melhus@uis.no

Janne Fauskanger
Universitetet i Stavanger
janne.fauskanger@uis.no

Lise, som er lærer i en 5. klasse, ba elevene sine om å finne tallet på den tomme linja i følgende oppgave:

$$8 + 15 = \_\_ + 9$$

Hun observerte at ikke alle elevene kom fram til det korrekte tallet 14. En elev skrev 23, mens en annen skrev 32. Disse svarene følger vanlige feilmønstre, og Lise var forberedt på at de kunne dukke opp som mulige elevsvar. Hun hadde også planlagt hvordan hun eventuelt kunne hjelpe elever som kom fram til disse svarene.

Tenk gjerne over spørsmålene under før du leser videre:

- Hvordan tror du elevene som skriver 23 og 32 på den tomme linja, har tenkt?
- Hva er det elevene forstår og ikke forstår?
- Hvordan kan Lise anta at disse feilsvarene vil forekomme? Hvilken kunnskap er det Lise baserer sine antagelser på?
- Hvordan ville du som lærer møte elevene som svarer 23 og 32, og ville du møte begge svarene på samme måte? Hvilken type oppgaver ville du for eksempel gi dem? Hvilke spørsmål ville du stilt? Hvilke diskusjoner ville du invitert dem inn i?

Det siste eksempelet viser en bruk av likhetstegnet som også er vanlig å se hos elever med ellers god kompetanse i matematikk. En elev som ble bedt om å skrive ned hvordan hen tenkte for å finne ut hva 63 – 25 er, skrev for eksempel slik:

$63 - 25 = 60 - 20 = 40 - 5 = 35 + 3 = 38$

Sluttsvaret er riktig, og utregningen viser god tallforståelse og en evne til å holde styr på mange detaljer, men den illustrerer tydelig hvordan likhetstegnet er brukt som et prosesstegn og ikke som et tegn som indikerer lik verdi på hver side. En slik oppfattelse kan styrkes gjennom bruk av kalkulator. Der fungerer nemlig likhetstegnet som et prosesstegn, og det er helt vanlig at vi utfører en deloperasjon, trykker på tasten med likhetstegn og fortsetter å manipulere tallet vi får til svar, slik som eleven i det siste eksempelet.

For å lykkes med en oppgave som $8 + 15 = \_\_ + 9$ må elevene forstå at likhetstegnet uttrykker en relasjon mellom $8 + 15$ og $\_\_ + 9$. Mer presist må de forstå at tegnet symboliserer matematisk ekvivalens, som i dette tilfellet betyr at de to uttrykkene har lik verdi. Knuth et al. (2006) fant at elever som forstår dette, har større sjanse for å kunne løse likninger som for eksempel $3m + 7 = 25$ korrekt, enn de som har operasjonell forståelse for likhetstegnet. Selv etter å ha kontrollert funnene opp mot klassetrinn og generell matematikkompetanse fant de at sammenhengen mellom forståelsen for likhetstegnet og evnen til å løse likninger var signifikant (Knuth et al., 2006, s. 305). Dette støttes av funn fra Hornburg et al. (2022). De fulgte elever i fem år og fant at forståelse for matematisk ekvivalens i småskolen predikerer både algebraisk forståelse og mer generell matematisk kompetanse på sjette trinn.

Behr et al. (1980) ga elever i alderen 6 til 12 år ulike typer likheter, også likheter som ikke inneholdt regneoperasjoner, og likheter som kun hadde en regneoperasjon på høyre side. De fant at spesielt de yngste elevene hadde vanskelig for å akseptere en likhet som $3 = 3$. De ville helst endre den til $0 + 3 = 3$ eller til $3 - 3$ og deretter til $3 - 3 = 0$. En usann likhet som $3 = 5$ ble heller ikke godtatt, men gjort om til for eksempel $3 + 5$ eller $2 + 3 = 5$. Mange av elevene hadde også en klar formening av at regneoperasjonen skulle komme først og svaret til slutt. En likhet som $\_\_ = 3 + 5$ ble sagt å være «bakvendt». Noen elever valgte å lese den fra høyre mot venstre («5 pluss 3 er lik 8»), mens andre valgte å gjøre den om til $3 + 5 = \_\_$ eller $\_\_ + 3 = 5$ (Behr et al., 1980, s. 14). Disse funnene støttes av nyere forskning (for eksempel Stephens et al., 2021).

En kan hevde at det er naturlig at elever som er i startfasen av å lære seg noe, har mangelfull forståelse, og at dette er noe som vil endre seg om de får mer erfaring. Mange studier viser da også at andelen elever med operasjonell forståelse for likhetstegnet blir mindre med årene, men nedgangen kan sies å være langt mindre enn man kunne ønsket. I en studie blant totalt 1230 norske elever på 5. og 8. trinn fant Opsal (2019) at omtrent 60 % av elevene på 5. trinn og 30 % av de på 8. trinn sannsynligvis hadde en operasjonell forståelse for likhetstegnet. Andre har funnet at alderen ikke har noen nevneverdig betydning (for eksempel Falkner et al., 1999; Kieran, 1981), men fremhever at undervisningen er av stor betydning.

Undervisning – anbefalinger, og hva en bør unngå

Hvis det er slik at undervisning kan være en årsak til at elever ikke utvikler en forståelse av at likhetstegnet uttrykker en relasjon (for eksempel Asquith et al., 2007), og hvis det er slik at elever flest kan utvikle en slik forståelse om de gis relevante erfaringer i en støttende undervisningskontekst (Carpenter et al., 2003), så er det klart at hvordan det undervises, er viktig.

Episoden i begynnelsen av artikkelen oppleves kanskje som noe som hører til på småskoletrinnet. Grunnlaget for å forstå likhetstegnet skal riktignok legges der, men hva skal en gjøre dersom elever kommer til 5. eller 8. klasse med operasjonell forståelse for tegnet, slik Opsal (2019) har funnet? Da er det avgjørende at lære-

a) $8 = 8$
b) $8 + 3 - 3 = 8$
c) $3 + 5 = 5 + 3$
d) $12 - 7 = 7 - 12$
e) $11 + 3 = 10 + 4$
f) $11 - 3 = 10 - 4$

Figur 1: Sant eller usant?

ren har en forståelse for likhetstegnets ulike betydninger og for kunnskap om elevers (mis)forståelse av tegnet. I tillegg er det viktig å vite hvordan en som lærer kan få kjennskap til elevenes tenkning, og om hvordan en skal undervise for at elevene får god forståelse for dette tegnet (Prediger, 2010). Hva skal for eksempel Lise foreta seg om mange elever i hennes 5. klasse skriver 23 eller 32, og ikke 14, på den tomme linja i $8 + 15 = \_\_ + 9$?

For å forbedre elevenes forståelse for likheter og likhetstegnet fremhever Carpenter et al. (2003) at en i undervisningen må gi elevene mulighet til å artikulere hvordan de forstår likhetstegnet, og at deres eventuelle begrensede oppfatning for tegnet må utfordres for å kunne avhjelpes. Dette kan gjøres ved at elevene møter likhetstegnet gjennom ulike typer oppgaver. Likheter som $8 + 15 = \_\_ + 9$ kan danne et fint utgangspunkt for å diskutere likhetstegnets betydning og hvordan det brukes på en korrekt måte. Elever med ulike svar som 23, 32 og 14 kan argumentere for tallet de vil ha på den tomme linja, og på den måten kan de som har skrevet 23 og 32, få innblikk i argumentasjonen til de som har skrevet 14.

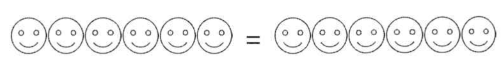
En annen oppgavetype som kan anbefales, er diskusjon av sanne og usanne likheter, slik som eksemplene i figur 1.

Likhetene som inneholder regneoperasjoner, er valgt slik at de kan knyttes til viktige aritmetiske egenskaper eller prinsipper, slik for eksempel Molina et al. (2008) beskriver. Dermed kan de løses uten regning. Siden addisjon og subtraksjon er motsatte regneoperasjoner, er likheten i b) sann. Likheten i c) er sann siden den kan knyttes til den kommutative loven for addisjon, mens likheten i d) er usann siden subtraksjon ikke er kommutativ. At likheten i e) er sann, kan begrunnes med at første ledd på høyre side er 1 mindre enn første ledd på venstre side, mens det andre er 1 større. Da må summen være den samme. Det samme gjelder imidlertid ikke for subtraksjon. Hvis første ledd på høyre side er 1 mindre enn første ledd på venstre side, så må også det andre leddet være 1 mindre dersom differansen, eller forskjellen mellom tallene, skal være bevart. Derfor er likheten i f) usann, mens for eksempel $11 - 3 = 10 - 2$ er sann.

Oppgaver som dette illustrerer hva Carpenter et al. (2003, s. 40) mener når de skriver at «algebraic reasoning is not a separate topic; it is integrally bound with the learning of arithmetic, and it can make the learning of arithmetic easier and richer». Etter hvert kan man gi likheter der ett av tallene er erstattet med en tom linje, og la elevene diskutere seg fram til hvilket tall de må sette på linja for å gjøre likheten sann. Senere kan elevene utfordres til å lage liknende oppgaver selv. Carpenter et al. (2003) kommer også med noen «advarsler». Figur 2 inneholder noen typiske eksempler. I det første er likhetstegnet brukt for å angi antall objekter i en mengde. Det er ganske riktig 6 blyanter i mengden, men mengden selv er ikke lik tallet 6. Problemet med det andre eksempelet er at selv om to mengder inneholder like mange objekter, så trenger de ikke være like. En gruppe med 6 barn er ikke lik en annen gruppe med 6 barn. Denne bruken av likhetstegn er svært utbredt i mange lærebøker, men ifølge Carpenter et al. (2003) er det altså noe man bør unngå.

For antall objekter i en samling:

Bruk av likhetstegn mellom to bilder:



Figur 2: Eksempler på hva som bør unngås.

Konklusjonen fra store deler av forskningslitteraturen er at likhetstegnet må knyttes til et vidt spekter av betydninger. Erfaringer med regneoperasjoner på begge sider av likhetstegnet vil kunne lede til at elevene utvikler forståelse for likhetstegnet som matematisk ekvivalens (Li et al., 2008). Et annet aspekt som kan trekkes inn, er substitusjon. Det dreier seg om ideen om at et uttrykk kan erstattes av et annet, ekvivalent, uttrykk. Donovan et al. (2022) har funnet at ideen om substitusjon kan ha en enda større innflytelse på algebraprestasjoner enn ideen om «det samme som».

Om norske elevers begrensede forståelse for likhetstegnet (Opsal, 2019) har noe å gjøre med undervisning, er det nødvendig å fokusere på elevenes første møte med likhetstegnet. For en lærer blir da kritisk valg av oppgaver viktig (se for eksempel Li et al., 2008). Videre vil vi presentere noen eksempler på hvordan man kan innføre likhetstegnet, og hvilke typer oppgaver som kan være aktuelle[2].

En første innføring av likhetstegnet

For å utvikle en god og robust forståelse oppfordres det til at elevene får jobbe systematisk og variert. Det første møtet med likheter og likhetstegn bør kanskje ikke inneholde noen regneoperasjon, men heller være rettet mot det å sammenlikne antall i konkrete mengder (figur 3). Eselet på bildet har like mange gulrøtter som grisen har nøtter. Det er et viktig moment at det som er likt, er antallet i de to mengdene og ikke mengdene i seg selv. Vi kan vise at antallet er likt, ved å skrive 4 = 4. Når skrivemåten er innført, kan elevene få vite at 4 = 4 kalles en likhet, og at symbolet = kalles likhetstegn.

Elevene vil ofte havne i situasjoner der antall objekter i to mengder ikke er likt. Derfor kan det være lurt å innføre ulikheter og ulikhetstegn samtidig som likheter og likhetstegn innføres. La elevene telle og finne ut om det er like mange eller ikke, for så å skrive ned resultatet ved hjelp

Figur 3: Oppgave 52 i Matematikk, Grunnbok 1A (Arginskaya, 2015, s. 35).

av tegnene =, < og >. Unngå å bruke tegnene mellom bilder eller mellom bilder og tall, slik vi har sett Carpenter et al. (2003) advare mot.

Innimellom oppgaver med konkrete mengder kan man etter hvert også la elevene møte oppgaver som er mer abstrakte (se forslag til oppgavetyper i figur 4).

102 Sett inn relasjonstegn (< = >) slik at det stemmer.

$3 \square 2 \quad 5 \square 5 \quad 7 \square 9 \quad 6 \square 4 \quad 7 \square 7$

108 Fyll inn tall som passer.

$\square = 3 \quad 4 > \square \quad 6 > \square$

$8 < \square \quad \square < 2 \quad 1 = \square$

Figur 4: Eksempler fra Matematikk, Oppgavebok 1A (Blank & Melhus, 2021, s. 49 og 51).

Man kan gjerne bruke tegnene en god stund på denne måten – for å sammenlikne antall/tall – før regneuttrykk involveres i likhetene/ulikhetene. Når tiden er kommet for å introdusere likheter med regneuttrykk, kan man fortsatt fokusere på begrepet likhet, heller enn at = er noe vi setter før vi skriver svaret. Tegn for eksempel 4 røde og 2 blå sirkler på tavlen. Til tegningen kan vi lage uttrykket 4 + 2. Vi kan også telle og se at det er totalt 6 sirkler på tegningen. Be elevene selv forklare hva skrivemåten 4 + 2 = 6 kan bety. Hvorfor står det et likhetstegn mellom summen 4 + 2 og tallet 6? Elevene skal lære seg å bruke likhetstegnet på en måte som andre har bestemt, men ved å utfordre dem til selv å forklare bruken kan de likevel ta eierskap og få

erfare notasjonsbruken som fornuftig.

I det videre arbeidet kan oppgaver som ikke inneholder likhetstegn, inkluderes, for eksempel «Regn ut 6 + 2», sammen med oppgaver der det forventes at elevene skal skrive hele likheten selv, for eksempel «Finn svaret ved å lage et uttrykk som passer».

I begynnelsen er det viktig å fokusere på riktig bruk av relasjonstegnene =, < og >, men etter hvert bør elevene også kunne identifisere uriktig bruk, for eksempel kunne skille mellom sanne og usanne likheter og ulikheter. Å konfrontere elevene med eksempler som viser uriktig bruk, er viktig, på samme måte som det er viktig å diskutere feil elevene selv gjør. Elevene skal etter hvert forstå at likhetstegn betyr at tallverdien på hver side er lik, mens ulikhetstegn betyr at tallverdiene er ulike, samtidig som det gis informasjon om hvilken side som har størst eller minst verdi.

Hvis vi ønsker at elever skal godta at det kan stå regneoperasjoner på begge sider av et likhets- eller ulikhetstegn, må de etter hvert konfronteres med denne typen eksempler. Sann/usann-oppgaver, for eksempel de på figur 1 over, kan være fine å bruke. En variant av slike oppgaver kan være å skulle sammenlikne verdiene til to uttrykk og sette inn riktig tegn (figur 5). Oppgaver som dette legger opp til at tegnene =, < og > uttrykker en relasjon mellom verdiene på hver side av tegnet. Ved å be elevene om å løse slike oppgaver uten å regne ut utfordrer man dem til å bruke viktige aritmetiske egenskaper og prinsipper, slik Molina et al. (2008) anbefaler.

120 a) Sett inn riktig relasjonstegn uten å regne ut.

8 + 3 … 7 + 3	7 + 4 … 7 + 6	5 + 7 … 7 + 5
9 + 5 … 5 + 9	5 + 6 … 4 + 6	8 + 3 … 9 + 4

Figur 5: Oppgave fra Matematikk, Grunnbok 2A (Blank & Melhus, 2022, s. 62).

Avrunding

Likhetstegnet innføres allerede på første trinn, og i begynnelsen knyttes det gjerne primært til det å utføre regneoperasjoner. Når elevene senere skal bruke likhetstegnet i algebra, er det imidlertid avgjørende at de har utviklet en forståelse av at tegnet symboliserer at uttrykkene på hver side har samme verdi, likhet, og også at uttrykket på den ene siden kan erstattes av uttrykket på den andre, substitusjon. Derfor er det viktig å få elevene bort fra å tolke likhetstegnet som et signal om at de skal «gjøre noe», eller som et tegn som skiller en oppgave fra «svaret».

Mye tyder på at undervisningen er avgjørende for om elever forkaster den operasjonelle forståelsen til fordel for en forståelse basert på «samme verdi» eller substitusjon. En anbefaling er å innføre likhetstegnet, sammen med ulikhetstegn, uten at det er noen regneoperasjoner involvert. En annen anbefaling er å diskutere likheter med uttrykk på begge sider av likhetstegnet. Slike likheter bør være knyttet til viktige aritmetiske egenskaper eller prinsipper, slik at man kan avgjøre om de er sanne, uten å måtte gjøre noen beregninger. Arbeid med denne typen oppgaver kan danne et fint utgangspunkt for eksplisitt å diskutere hva likhetstegnet betyr.

Dersom elevene møter likhetstegnet i varierte oppgaver og ikke kun standardiserte situasjoner der man har et uttrykk på venstre side og et tall på høyre side, er det et håp om at man unngår at de utvikler en forståelse som kan være til hinder for deres videre matematiske utvikling. Vi ser her valg av oppgaver elevene skal arbeide med, som avgjørende.

Noter

1 Episoden er diskutert i Jakobsen et al. (2014). Undervisningskunnskap i matematikk for lærere på 1.–7. trinn. I T. Gustavsen et al. (red.), QED 1–7. Matematikk for grunnskolelærerutdanningen. Bind 2 (s. 631–656). Cappelen Damm Akademisk.

2 Alle eksemplene er hentet fra læreverket Matematikk. Vi gjør oppmerksom på at den ene forfatteren av denne artikkelen, Kjersti Melhus, også er medforfatter på dette læreverket.

Referanser

Arginskaya, I., Beneson, E., Itina, L., Blank, N., Melhus, K. & Moe, G. I. (2015). *Matematikk – Grunnbok 1A.* Barentsforlag.

Asquith, P., Stephens, A. C., Knuth, E. J. & Alibali, M. W. (2007). Middle school mathematics teachers' knowledge of students' understanding of core algebraic concepts: Equal sign and variable. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 249–272. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_15

Behr, M., Erlwanger, S. & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching, 92*, 13–15.

Blank, N. & Melhus, K. (2021). *Matematikk – Oppgavebok 1A.* Barentsforlag.

Blank, N. & Melhus, K. (2022). *Matematikk – Grunnbok 2A.* Barentsforlag.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school.* Heinemann.

Donovan, A. M., Stephens, A., Alapala, B., Monday, A., Szkudlarek, E., Alibali, M. W. & Matthews, P. G. (2022). Is a substitute the same? Learning from lessons centering different relational conceptions of the equal sign. *ZDM Mathematics Education, 54*, 1199–1213. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01405-y

Falkner, K. P., Levi, L. & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics, 6*(4), 232–236.

Hornburg, C. B., Devlin, B. L. & McNeil, N. M. (2022). Earlier understanding of mathematical equivalence in elementary school predicts greater algebra readiness in middle school. *Journal of Educational Psychology, 114*(3), 540–559. https://doi.org/10.1037/edu0000683

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*, 317–326. https://www.jstor.org/stable/3482333

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M. & Alibali, M. W. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(4), 297–312. https://www.jstor.org/stable/30034852

Li, X., Ding, M., Capraro, M. M. & Capraro, R. M. (2008). Sources of differences in children's understandings of mathematical equality: Comparative analysis of teacher guides and student texts in China and the United States. *Cognition and Instruction, 26*, 195–217. https://www.jstor.org/stable/27739880

Molina, M., Castro, E. & Mason, J. (2008). Elementary school students´ approaches to solving true/false number sentences. *PNA 2*(2), 75–86.

Opsal, H. (2019). How students in 5th and 8th grade in Norway understand the equal sign? *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02416427/document.

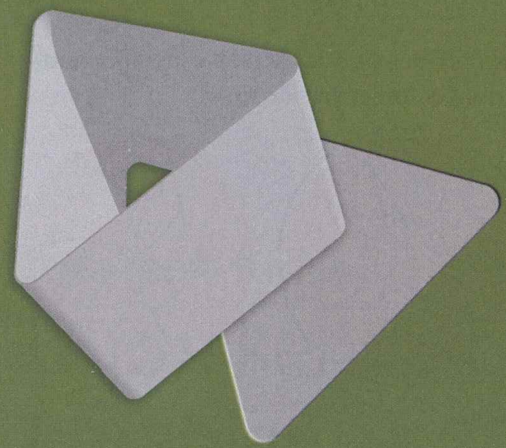
Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 73–93. https://doi.org/10.1007/s10857-009-9119-y

Stephens, A., Veltri Torres, R., Sung, Y., Strachota, S., Murphy Gardiner, A., Blanton, M., Stroud, R. & Knuth, E. (2021). From "You have to have three numbers and plus sign" to "It's the exact same thing": K–1 students learn to think relationally about equations. *Journal of Mathematical Behavior, 62.* https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100871

(fortsettes side 28)

Stylianides, A. J. (2016). *Proving in the elementary mathematics classroom.* Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198723066.001.0001

Valenta, A. & Enge, O. (2020). Bevisrelaterte kompetanser i læreplanen LK20 for matematikk i grunnskolen. *Acta Didactica Norden, 14*(3). https://doi.org/10.5617/adno.8195



Matematikk og kreativitet

Naylor

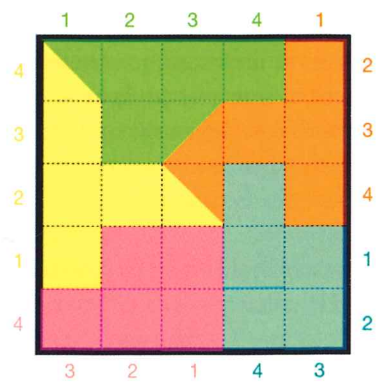
Deilige disseksjoner

Denne gangen skal vi se på tre deilige disseksjonsoppgaver, puslespill hvor en geometrisk form er kuttet i deler etter spesielle regler. Håper det smaker!

A. Kake til 5

Fem venner skal dele en kvadratisk kake. Kaken er frostet på toppen og på alle fire sidene. Vennene vil at hver skal få like mye kake og like mye frosting. Hvordan kan den deles?

Denne oppgaven har jeg brukt som ukens problem, og den passer godt for 5.–7. trinn. Et godt startpunkt er å tegne kaken som et 5×5 rutenett. Arealet blir 25 enheter, så hver venn må få et stykke med et areal på 5. Omkretsen til kvadratet er 20 enheter, og siden hvert stykke også skal ha like mye frosting, bør hvert stykke ha 4 enheter av omkretsen. En løsning er vist i Figur 1.



Figur 1

Mike Naylor
DragonFjord puzzles
mike@dragonfjord.com