

Hvor mange håndtrykk blir det hvis n personer skal håndhilse?

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n - 1)$$

Med de eldste elevene på barnetrinnet eller på ungdomstrinnet vil det kunne være et mål at elevene i tillegg til å formulere en generalisering med ord kan få til å formulere funksjonen med symboler:

$$h = \frac{n(n-1)}{2}$$

(h står for antall håndtrykk og n for antall personer.)

Jeg tenker at det kan gå an å forklare denne formelen slik: Se for deg at alle (n) hilser på alle bortsett fra seg selv ($n - 1$). Vi må dele på to til slutt fordi vi da har telt med dobbelt så mange håndtrykk som det egentlig blir (Kari hilser på Geir, og Geir hilser på Kari, ett av disse håndtrykkene må tas bort fra utregningen).

Det kan være interessant å sammenlikne dette uttrykket med formelen for trekantantall. Hva er likt, og hva er forskjellig?

Gjennom bruk av planlagte klassesamtaler og samtaletrekk og utforskning av elevenes forskjellige løsningsmetoder mener jeg at vi har fått jobbet med kjerneelementet abstraksjon og

generalisering i arbeidet med denne oppgaven. Elevene har fått utvikle sitt matematiske språk, og vi har brukt tankene og strategiene deres som utgangspunkt for samtalene. Vi har kommet et steg på vei til å generalisere. Vi har ikke formulert en generalisert funksjon hverken med ord eller symboler, men vi har funnet en metode som kan brukes for å finne ut hvor mange håndtrykk det blir når det stadig kommer flere barn til.

Referanser

- Amundsen, B. H. (2021). Funksjonstenking på 1. trinn. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 32(1), 10–14.
- Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: transforming thinking, transforming practice*. Heinemann.
- Kazemi, E. & Hintz, A. (2014). *Intentional talk. How to structure and lead productive mathematical discussions*. Stenhouse Publishers.
- Kieran, C. (2018). Seeking, using, and expressing structure in numbers and numerical operations: A fundamental path to developing early algebraic thinking. I C. Kieran (Red.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice* (s. 79–105). Springer.
- Nyhus, G. (2018). Trapesbordproblemet. *Tangenten – tidsskrift for matematikkundervisning*, 29(3), 2–7.

Fra arkivet

I min første klasse var «skoleveien» tema da elevene begynte på skolen om høsten. En elev fortalte ivrig: «Min vei er bare rett nedover, og så er jeg der». Han bodde rett ved skolen. «Jeg kan gå to veier», sa ei av jentene. «Jeg kan enten gå bortover gangveien og forbi dammen og nedover der. Eller jeg tar følge med Kari. Da går jeg nedover og bortover til fotgjengerfeltet. Så er jeg på skolen.» Elevene tegnet skoleveien sin og forklarte hvordan de gikk.

I artikkelen «Nærmiljøet som prosjekt» i *Tangenten* 1/2014 beskrev Annbjørg Håøy arbeid med kart over nærmiljøet i en første klasse.

Les denne artikkelen og andre godbiter fra *Tangenten* arkivet på tangenten.no

Justnes

Flerkulturelle rom som ressurs

Jeg har i flere år undervist på mellomtrinnet på skoler med stort elevmangfold, her forstått som skoler med stor andel minoritetsspråklige, flerspråklige og flerkulturelle elever. Jeg har derfor flere kolleger og venner som er lærere på skoler med lignende elevgrunnlag. I samtaler med lærere diskuterer vi kjente utfordringer i matematikkundervisningen, og vi deler erfaringer med ulike forsøk på og tiltak for å redusere hindringer for elevers deltakelse. Ønsket er å sikre alle elever tilgang til meningsfull matematikk. Selv om disse lærerne arbeider etter prinsipper for god matematikkopplæring, etterspør flere av dem litteratur, materiell og ressurser som kan støtte dem i arbeidet med matematikkundervisning i et flerkulturelt klasserom. Dette er ikke unikt. Som følge av globalisering og innvandring opplever mange skoler en økning i antall flerspråklige elever. Det fører til at lærere må vise forståelse for at det tar tid for elevene å lære seg både språk og normer i matematikkfaget. Fordi god matematikkopplæring må ta utgangspunkt i elevers tenkning, interesser, erfaringer og kunnskap, anbefales det i tillegg at lærere utvikler eksplisitte strategier for å utnytte elevenes språklige og kulturelle verktøy-

kasse for å legge til rette for bedre læringsmuligheter i matematikk (Chval et al., 2021). Dette innebærer å skifte perspektiv, fra flerspråklighet som problem til flerspråklighet som ressurs (Planas & Civil, 2013). For at ressursperspektivet skal bli noe mer enn en ideologi, bør forskere og lærere sammen utforske flerspråklighet som ressurs i praksis, framfor å fordype seg i hindringer. I denne artikkelen vil jeg presentere noen erfaringer fra klasserom med stort elevmangfold, der forskere og lærere sammen har utforsket hvordan elevenes språklige og kulturelle verktøykasse kan være ressurser for en mer inkluderende matematikkundervisning.

Identifisere hindringer

I en studie som tok sikte på å inkludere flere av de flerspråklige elevene i en 3.-klasse i matematiske samtaler, identifiserte Justnes & Gätzschmann (2023) at konteksten et matematisk problem er rammet inn i, kunne utgjøre et hinder for at elever engasjerte seg i problemet i fellesskap med medelever. Observasjoner av matematikkundervisningen gav en rekke eksempler på ord i kontekster som kunne utgjøre hindringer. Justnes & Gätzschmann (2023) fant eksempler på at elevene ikke forstår matematikkordet, for eksempel oddetall, at elever ikke forstår hverdagsordet, for eksempel køyeseng, og at elever ikke forstår undervisningsordet, for eksempel argumenter for eller rund av. I tillegg er det en

Camilla Norman Justnes

Matematikksenteret

camilla.justnes@matematikksenteret.no

del ord som er både hverdagsord og matematikkord, for eksempel rot og negativ. Erfaringer fra praksis har vist at mange elever bruker og forstår ordene som blir introdusert i undervisningen, men at noen elever kan mangle forståelse for ord som læreren tar for gitt at de kan. Det kan være både hverdagsord og småord. Elevene kan for eksempel bruke ordet representere eller tierplass selv om de ikke forstår ordet synke. Eller når elevene får oppgaven «Ring rundt tierplassen», så tegner de en ring over sifferet 2 i tallet 129. Da har de riktig nok identifisert tierplassen, men ikke tegnet ringen rundt tallet. Heldigvis vil de fleste lærere fortsett betrakte det som riktig svar.

I samme studie fant Justnes & Gätzschnmann (2023) også at selve konteksten, ikke bare ett eller flere ord, kunne være et hinder for at elevene engasjerte seg i problemet. Et eksempel var en kontekst med overnattingsgjester fordelt på ulike køyer i en køyeseng. Selv om problemet ble presentert både verbalt og visuelt med bilder av en køyeseng, måtte læreren bruke mye tid på å forklare hva overnattingsbesøk er, hvorfor noen overnatter, og hvordan de kommer seg opp og ned av køyesengen. I samtaler med tospråklige lærere kom det fram at i mange kulturer overnatter man bare hvis man må. Det blir ikke oppfattet som en fritidsaktivitet, og i mange tilfeller sover de på madrasser utover gulvet (ikke i høyden). Det kan være både morsomt, lærerikt og språkutviklende å bruke tid på å forstå kontekstene, men mange av lærerne jeg møter, bekymrer seg for fordelingen av tiden de bruker på språkopplæring og på matematikkopplæring.

Strategier ved hindringer

Da elevene møtte kontekster og språk som de ikke forstod i matematikkundervisningen, observerte Justnes & Gätzschnmann (2023) en rekke ulike elevstrategier som ble møtt med lærerstrategier som hadde til hensikt å støtte elevenes deltakelse. Noen ganger så det ut som elevene «ikke gjorde noen ting», og noen ganger hermet elevene etter det medelevene eller lære-

ren gjorde. Andre ganger varslet de læreren om at de ikke forstod, eller de spurte konkret hva noe betydde. Da forklarte ofte læreren på nytt, enten i plenum eller til enkelteleven, og gjerne ved hjelp av gester eller materiell. Noen ganger viste læreren hvordan eleven skulle gjøre det, eller oppfordret en medelev til å forklare eller å vise. Dette er tidkrevende strategier, noe som gjør at mange ønsker å ha flere voksne i rommet for å sørge for at alle elevene får den støtten de trenger. I en sak fra NRK i mars 2023 fortalte en lærer at når hun står foran klassen, vet hun at flere elever ikke forstår det hun sier. Og selv om læreren ofte vet hva som skal til for å hjelpe dem, får ikke læreren gjort det (Fange, 2023). Behovet for å forklare og vise, enten selv eller ved hjelp av medelever, slik at alle elevene forstår slik at de kan engasjere seg i det matematiske problemet, virker med andre ord nokså kjent.

Det kan være verdifullt å reflektere over fordeler og ulemper ved strategiene beskrevet ovenfor. Lærere eller medelever som forklarer, kan bidra til at elevene forstår og dermed kan delta i klassens felles meningsskaping. Men det er også en risiko for at forklaringene reduserer de kognitive kravene i et problem. For eksempel ved å vise framgangsmåter som elevene skal følge, eller ved å forenkle problemet ved å redusere konteksten eller språket slik at elevene bare forholder seg til tall, beregning eller herming. Vil en undervisning som legger vekt på forklaring og demonstrasjon, gi alle elever like muligheter til å engasjere seg i meningsfull matematikk? Og hvem blir betraktet som kompetente i et slikt klasserom?

Aspekter ved matematikkundervisning i flerspråklige klasserom

I boken *Teaching Math to Multilingual Students: Positioning English learners for Success* foreslår Chval et al. (2021) en rekke praksis- og forskningsbaserte tilnærminger til matematikkundervisning som legger vekt på flerspråklige elever som ressurser. Ved å bygge på elevens livsverden og kulturelle bakgrunn, opprettholde

kognitive krav og ha høye forventninger, kan lærere posisjonere elever som kompetente og meningsskapende. Å posisjonere elever som kompetente og meningsskapende handler om lærerens avgjørelser, grep og kommunikasjon som posisjonere elevene overfor hverandre, seg selv og det matematiske innholdet (Mosvold & Bjuland, 2019). Det kan for eksempel innebære at læreren etablerer normer for deltakelse slik at elevene erfarer sine bidrag som viktige for klassens felles konstruksjon av kunnskap. Læreren skaper altså holdninger som har innvirkning på elevens selvbylde, mestringstro og innstilling til faget.

For å unngå hindringer relatert til språk, slik Justnes & Gätzschnmann (2023) identifiserte, legger Chval et al. (2021) vekt på strategisk språkbruk, støttet av visuelle representasjoner og gester. Som tidligere nevnt handler strategisk språkbruk om å unngå ord som er kontekstspesifikke, for eksempel er ordet *overtrekksvott* nokså spesifikt for Norge / nordiske land, mens ordet *kassett* er utdatert. I tillegg bør lærere unngå ord med flere betydninger, være bevisste på hvor tydelige «undervisningsordene» er, og vurdere om de bør legge til en visuell representasjon eller fjerne en som kan være forvirrende. For lærere kan det være en god øvelse å vurdere et problem de tenker å presentere for elevene med tanke på strategisk språkbruk.

Jeg skal videre ta for meg to tilnærminger til matematikkundervisning i flerspråklige klasserom som Chval et al. (2021) anbefaler, og som jeg har utforsket sammen med lærere i praksis: engasjere elever med kulturelt relevante kontekster og involvere foreldre/familie. Disse to tilnærminger innebærer å bruke elevens livsverden som ressurser for kontekster og strategier. Det kan bidra til å posisjonere elevenes erfaringer som et viktig bidrag for klassens utforskning. Dette kan være materiell, historier, språk, strategier o.l. «Off you go» er foreslått av Deradroff (2023) som en undervisningsaktivitet som verdsetter og tar utgangspunkt i den kulturelle kunnskapen elevene bringer med seg inn i

klasserommet. Aktiviteten innebærer at elevene får se et bilde, og deretter går de på skattejakt etter tilsvarende eksempler der elevene er, for eksempel hjemme, utendørs eller i klasserommet. Elevene dokumenterer det de finner, ved å ta bilde, å tegne eller å beskrive det slik at medelevene kan se de eksemplene som hver enkelt bringer med seg inn i klasserommet. Et eksempel fra en utprøving på et norsk førstetrinn var at elevene fikk beskjed om å ta bilder av noe som de mente var «rundt», og sende dem til læreren sin. Elevene sendte inn bilder av objekter fra omgivelsene sine som både var kuleformet, sylindereformet, sirkelformet og «andre rundinger». Bildene dannet utgangspunkt for felles samtaler om hvordan ting kan være rundt på forskjellige måter, ulike typer rundinger, likheter og forskjeller mellom kuler og sirkler osv. Med en slik aktivitet kan elevene legge merke til matematikk i omgivelsene sine og relatere det til egne interesser, samtidig som deres livsverden blir en ressurs for bedre begrepsforståelse i matematikkundervisningen.

Et eksempel på hvordan familie kan være en ressurs, er å bruke de ulike språkene i klassens familier som utgangspunkt for utforskning. Ulland & Jensen (2020) foreslår en rekke aktiviteter knyttet til begrepsforståelse, for eksempel «Se på selve ordet», ulike ordkart og arbeid med mot-eksempler som måter å bygge kunnskap på. Ved å se på selve ordet trekant på ulike språk får en mulighet for å diskutere egenskaper ved trekanten. På norsk kaller vi den trekant, på engelsk *triangel* og på tysk *Dreieck*. Ved å sammenligne ordene kan en diskutere forskjellen på kant, vinkel og hjørne. Nå kan du kanskje flere språk enn meg, eller kan du bruke et oversettelsesprogram til å finne trekant på flere språk? Hva er likt, og hva er forskjellig? Jeg spurte min kollega fra Kina om å beskrive en trekant for meg på sitt språk, og ved å se på gestene hun brukte, forstod jeg at lukkethet er viktig for deres definisjon.

Et annet eksempel er å utforske algoritmer fra ulike kulturer. På hvor mange ulike måter

kan vi regne ut $15 \cdot 33$? Hva er likt, og hva er forskjellig? Jeg ble selv overrasket og lærte noe nytt da min kinesiske kollega viste meg hvordan hun beregnet $15 \cdot 33$. Du kan se hvordan hun gjorde det, ved å følge QR-koden.



Først delte hun opp 33 i 3 og 11 . Så multipliserte hun $15 \cdot 3$ og fikk 45 . Deretter skrev hun opp $45 \cdot 11$, så 5 på enerplass, 9 på tierplass ($4 + 5$) og til slutt 4 på hundrerplass. Hun fortalte at i Kina lærte de å lete etter 11 i et multiplikasjonsstykke slik at de kunne bruke akkurat denne strategien.

Om en gir elever (og familie/foreldre) muligheter til å vise fram det de kan fra før, bidrar det til en opplevelse av anerkjennelse, og det posisjonierer elevene som kompetente. Jeg møtte nylig en lærer med tyrkisk bakgrunn. Hun fortalte at da hun begynte på skole i Norge, kunne hun multiplisere tosifrede tall, men hun gjorde det på en annen måte enn den læreren viste fram i klasserommet. Hun ble aldri spurt om å vise sin måte, og siden hun var ny og ikke kunne språket, følte det utrygt for henne å «ta ordet» for å vise fram metoden uoppfordret. Elever som ikke får anerkjennelse, kan oppleve undervisningen som lite relevant, og det kan også påvirke deres identitetsutvikling (Honneth, 2007). Ved at ulike strategier forblir «skjult», mister også norske elever muligheten til å utvikle sin flerkulturelle kompetanse. Å innta et perspektiv der alle elevers og familiers strategier er en ressurs for matematikkundervisningen, kommer alle elevene i en mangfoldig skole til gode.

Et siste eksempel på hvordan lærere kan involvere foreldre og familie slik at de kan bidra til ny innsikt og nye perspektiver, er det tverrfaglige prosjektet «Hvem gjorde hva i matematikk i mitt land», inspirert fra forskningsprosjektet M^3EaL .¹ Prosjektet kan for eksempel initieres som et gruppearbeid der en eller flere av

elevene i gruppen har tilknytning til en annen kultur eller et annet land, eller elevgruppen kan bli tildelt et land. Deretter skal hver gruppe gå på jakt etter en matematiker eller et matematisk emne som har sin opprinnelse i, har blitt utviklet videre i eller har annen tilknytning til landet som er valgt. I denne delen av prosessen er foreldre og familie en ressurs for elevene. Gruppene presenterer deretter arbeidet for resten av klassen og kanskje til familiene også? Et slikt prosjekt er nyttig for å vise at matematikk er et internasjonalt og tverrkulturelt fag som ikke ville ha eksistert i dag uten bidrag fra flere kulturer, og at elevers kulturelle bakgrunn er en ressurs og ikke en utfordring.

I skoler med stort elevmangfold er det rimelig å anta at elever har ulike kulturelle og språklige bakgrunner som en del av sin tidligere kunnskap. Lærernes kjennskap til elevenes tidligere kunnskap spiller inn på hvilke representasjoner, eksempler, oppgaver og aktiviteter lærerne velger, og dermed også på hva slags matematikk elevene får mulighet til å engasjere seg i. I et mangfoldig klasserom bør lærerne gjøre vurderingene også med tanke på språk og kultur. I et problemperspektiv kan dette handle om å identifisere og forutse hindringer for deltakelse og å gjøre grep som legger til rette for at elevene kan overkomme hindringene. I et ressursperspektiv kan det derimot handle om å anerkjenne og synliggjøre ulike språk, kontekster, problemer og løsningsstrategier som verdifulle ressurser som kan bidra til å involvere alle elevene i et mangfoldig klasserom med meningsfull matematikk.

Chval et al. (2021) anbefaler at lærere utvikler eksplisitte strategier for å utnytte elevenes språklige og kulturelle verktøykasse for å legge til rette for bedre læringsmuligheter i matematikk. Det forutsetter at lærere vet hvordan de får innsikt i elevers verktøykasse. I tillegg krever det at lærere og forskere sammen utvikler praksis- og forskningsbaserte tilnærminger til matematikkundervisning som passer til mangfoldige

(fortsettes side 47)

1/2024 tangenten

Hovtun, Røislien

Hvordan gjør jeg det?

Motivasjon er en nøkkelfaktor for læring. At elevene ikke bare har en vilje og et ønske om å lære, men også et behov for å delta i og mestre en lærings situasjon (Bomia et al., 1997). Dessverre får man ikke kjøpt motivasjonspiller på apoteket, men det er mulig å skape situasjoner der elevene opplever at de blir motivert (Stipek et al., 1998). Dette kan være utfordrende, og et av fagene der dette har vist seg å være ekstra vanskelig, er matematikk, der undervisningen tradisjonelt har vært preget av lav indre motivasjon og lav utholdenhet (Kunnskapsdepartementet, 2015). Da kan de matematiske utfordringene læreren presenterer, være aldri så gode, men dersom elevene ikke ønsker å arbeide med dem, vil de heller ikke få ta del i det potensielle læringsutbyttet.

Som matematikklærer har jeg¹ prøvd en rekke ulike ting for å skape motivasjon i klasserommet. Og noe av det jeg har hatt mest suksess med, er trylling. Matematisk trylling.

Gaute Hovtun

Universitetet i Sørøst-Norge
gaute.hovtun@uis.no

Jo Røislien

Universitetet i Stavanger / Bulldozer Film
jo@joroislien.no

tangenten 1/2024

Undrenes tid

Vi mennesker er undrende vesener. Barn undrer seg over hvorfor himmelen er blå, eller hva som skjer når man slikker på en metallstang om vinteren – til tross for velmenende råd fra voksne om å la være. Helt fra barn er små, underholder vi dem med undringsleker. Vi leker «borte, tittei!», og gjemmer ting bak ryggen – til barns store glede. Man skal ikke undervurdere kraften i å ikke vite.

For tryllekunstnere er folks fascinasjon for det tilsynelatende uforklarlige selve forretningsmodellen. Og mens folk frivillig flokker til trylleshow, flokker ikke akkurat elevene til klasserommene for å lære matematikk. Det er kanskje ikke så rart. I mange klasserom er matematikkundervisningen fortsatt i liten grad preget av undring, men heller av undervisning der gamle sannheter presenteres på forutsigbart vis, og gjentatt terping av framgangsmåter for å komme fram til svaret (Kunnskapsdepartementet, 2015). Instrumentell innlæring av geometriske formler og divisjonsalgoritmer er det motsatte av undring.

Matematikk er et særegent fag, med sin teoretiske grunnmur av absolutte sannheter. To pluss to er fire, samme hvor og når utregningen gjøres, og arealet av en sirkel er πr^2 – uavhengig av om denne sirkelen er en representasjon av en pizza eller bunnen av et oljefat. Disse absolutte sannhetene som matematikkfaget innehar, gjør

13