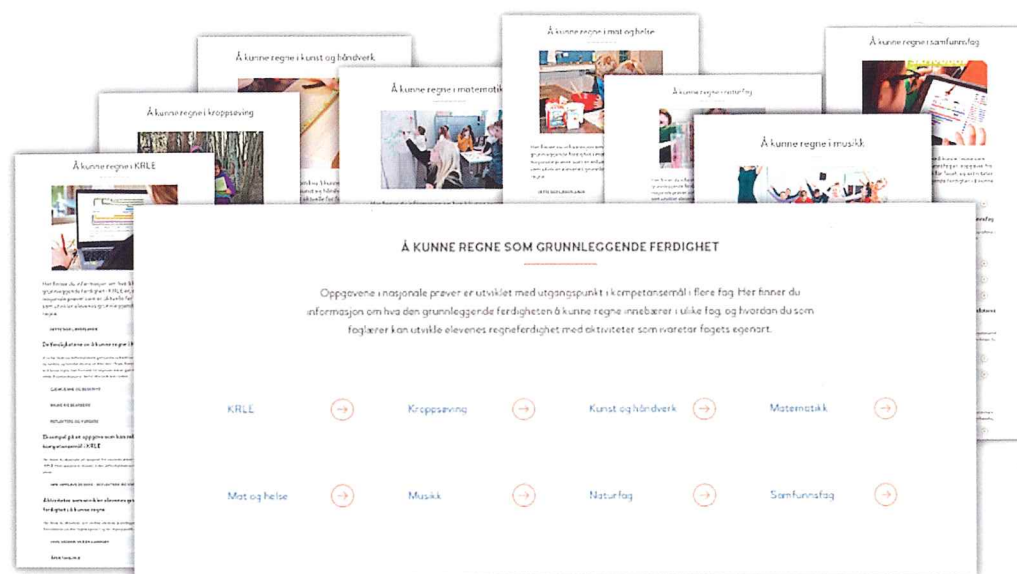


### Egne sider for hvert fag

Hvert fag hvor å kunne regne er en grunnleggende ferdighet, har fått sin egen side. Her kan du som faglærer lese om hva å kunne regne er i ditt fag, og du finner eksempler på oppgaver fra nasjonale prøver som er relatert til kompetansemål i faget. I tillegg presenterer vi aktiviteter som kan utvikle elevenes regneferdighet samtidig som de ivaretar fagets egenart. Aktivitetene tar utgangspunkt i kompetansemål i faget.



Hvert fag har fått sin egen side med eksempler på relevante oppgaver. Her finner du også aktiviteter som kan utvikle elevenes regneferdighet, samtidig som de ivaretar fagets egenart.

### Følg opp resultatene i lærerkollegiet

Selv om matematikklæreren har et spesielt ansvar for å utvikle elevenes grunnleggende ferdighet i å kunne regne, er det enklere å utvikle elever med god kompetanse i å kunne regne hvis alle faglærere drar i samme retning. Vi har derfor utviklet støttemateriell som viser hvordan dere kan analysere resultatene med hensyn til lokale forhold, elevens forutsetninger, undervisning og satsingsområder – og jobbe sammen for å få det beste ut av nasjonale prøver. «Gevinsten» er å utvikle elever med god kompetanse i å kunne regne.

## Utforskning med bruk av *Penn* i GeoGebra

Lene Grøterud Leer, universitetslektor ved Matematikksenteret NTNU

GeoGebra gir elevene mulighet til å utforske geometriske sammenhenger på måter som ikke er mulig med papir og blyant. Programmet inneholder mange nyttige verktøy, og i denne artikkelen presenterer jeg ett av de mer ukjente, nemlig *Penn*. Jeg viser også hvordan *Penn* kan støtte elevene når de utforsker geometriske sammenhenger i GeoGebra.

Verktøyet *Penn* lar elevene tegne i *Grafikkfeltet* (se ikon i figur 1). De kan bytte farge, utseende og tykkelse på tegningene (pennestrukene) i *Stilmenyen* slik som for andre GeoGebra-objekter. Ved å holde inne høyre museknapp kan de også viske ut dersom noe ble feil. GeoGebra lagrer tegningene som skisser som elevene for eksempel kan flytte, rotere og speile.



Figur 1: Ikonet til *Penn*.

Når elevene skal utforske matematiske sammenhenger i GeoGebra, er *Penn* nyttig for å markere relevante posisjoner. Elevene kan tegne oppå eksisterende objekter, for eksempel et punkt, og deretter flytte på objektet uten at markeringen følger med. Det er spesielt praktisk når elevene utforsker geometri. GeoGebra lagrer ikke koordinatene ved bruk av *Penn*. Hvis elevene trenger koordinatene til markeringene, må de bruke *Punkt* i stedet: Da kan de imidlertid ikke markere oppå andre objekter uten at punktet henger seg på.

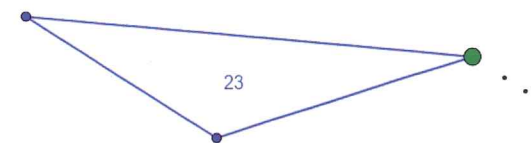
For å vise hvordan læreren kan bruke verktøyet i klasserommet, har jeg valgt ut tre aktiviteter. Alle tar utgangspunkt i at elevene lager en egen figur som de bruker som utgangspunkt for utforskning. Brunström (2015) har vist at elever som begynner med blanke ark i GeoGebra, lager hypoteser raskere og er mer utholdende i utfors-

skingsprosessen. Tiden det tar å la elevene lage egne figurer er derfor vel anvendt tid.

### Trekanter med samme areal

Varierte erfaringer er viktig for at elevene skal utvikle en robust og fleksibel forståelse av matematikk. I et dynamisk matematikkprogram som GeoGebra, kan elevene se mange eksempler basert på én dynamisk figur<sup>1</sup>. For eksempel kan elevene lage en trekant med verktøyet *Mangekant*, og deretter dra i hjørnene for å lage uendelig mange eksempler på trekanter. Men hva om trekanten for eksempel skal ha areal 23? Ved å dra i et eller flere av hjørnene til den samme trekanten kan elevene finne en trekant som har areal 23. Og ved å fortsette slik kan de finne flere. Sørg gjerne for at elevene velger 0 eller 1 desimal som innstilling i GeoGebra.

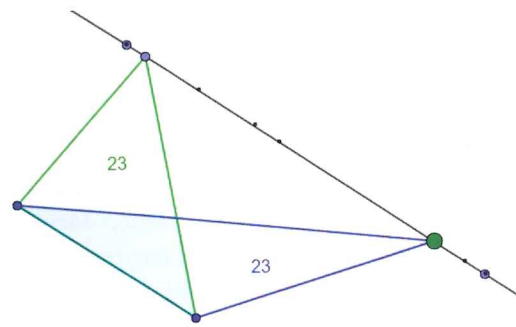
På jakt etter en matematisk sammenheng, vil elevene raskt få behov for å finne en systematisk måte å utforske trekanten. Å undersøke ett punkt om gangen er en nyttig strategi. Ved å bruke *Penn* for å markere posisjoner hvor arealet til trekanten er 23, kan elevene oppdage et mønster.



Figur 2: Trekanter med samme areal

I begynnelsen vil elevenes bevegelser være vilkårlige, men etter hvert vil de bruke tidligere observasjoner til å forutse hvor de tror at punk-

tet må være for at arealet skal bli 23. Erfaringene kan danne grunnlag for å lage en hypotese. De fleste vil oppdage at punktene ligger på linje. Noen vil også oppdage at linjen ser ut til å være parallell med den ene trekantsiden. Når elevene har laget en hypotese, kan de bruke verktøyene i GeoGebra til å teste om hypotesen stemmer. For eksempel kan de lage en rett linje gjennom markeringene, og deretter lage en ny trekant som har et punkt på linjen (grønn trekant på figur 3).



Figur 3: Grønn trekant har et punkt på linjen gjennom markeringene

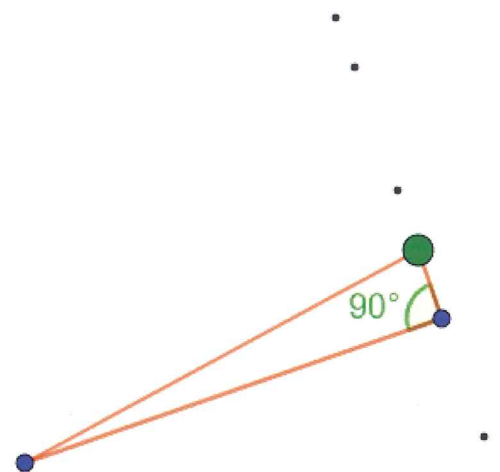
Etter at elevene har utforsket i GeoGebra, er det viktig med en matematisk klassesamtale for å oppsummere hva elevene har funnet ut. La de dele observasjoner og hypoteser. Hva har elevene oppdaget? Hva er felles for trekantene med areal 23? Hva er forskjellig? Hvorfor blir arealet 23? Dette gir en god anledning til å snakke om sammenhengen mellom grunnlinje, høyde og areal i trekantar.

#### Trekantar med en rett vinkel

Elevene kan også bruke en trekant som utgangspunkt for å utforske rettvinklede trekantar. De starter igjen med å lage en vilkårlig trekant med *Mangekant*. Klarer de å bevege på trekanten slik at en av vinklene blir  $90^\circ$ ? Kan de finne en ny trekant hvor den samme vinkelen fortsatt er  $90^\circ$ ? Kan de finne flere slike trekantar? Elevene markerer posisjonene som tilfredsstillende kriteriet med *Penn*, og etter hvert kan observasjonene gi et utgangspunkt for å lage hypoteser.

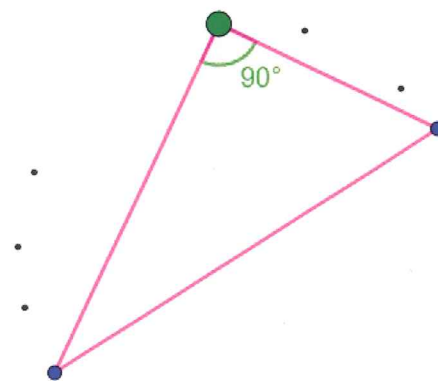
Avhengig av hvilket punkt elevene beveger

på, vil de oppdage ulike mønstre. For de som beveger et punkt som ikke er toppunkt til den rette vinkelen, vil det se ut som om punktet må ligge på en normal linje til den ene trekantsiden (figur 4). Elevene kan teste om det stemmer ved å lage den normale linjen og en ny trekant.



Figur 4: Trekant med rett vinkel (normal)

For de som beveger på toppunktet til den rette vinkelen, vil det se ut som om punktet ligger på en halvsirkel over den motstående trekantsiden (figur 5). Ved å lage halvsirkelen og en ny trekant kan elevene se om vinkelen alltid blir  $90^\circ$ .



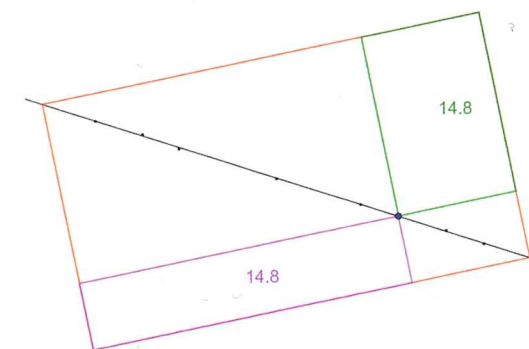
Figur 5: Trekant med rett vinkel (halvsirkel)

Observasjonene elevene gjør i GeoGebra kan

være et godt utgangspunkt for en klassesamtale. La de dele observasjoner og hypoteser. Elevene kan teste hypotesene sine ved å lage dynamiske, rettvinklede trekantar i GeoGebra ved hjelp av en normal linje eller en halvsirkel. At en trekant blir rettvinklet hvis de bruker en normal er nok kjent for de fleste elevene. Varianten med halvsirkel vil antakeligvis være en ny oppdagelse for mange. Sammenhengen heter «Tales' halvsirkel-teorem».

#### Rektangler i et rektangel

Rektangler i et rektangel er et godt utgangspunkt for både utforskning og bevis. Elevene lager først et dynamisk rektangel i GeoGebra. Deretter lager de et punkt i rektangelet, og bruker *Parallell linje* og *Mangekant* til å tegne rektanglene (figur 6, lilla og grønt) inni det store rektangelet. Elevene kan så undersøke om det er mulig å bevege punktet slik at lilla og grønt rektangel har like stort areal. Noen vil tenke at det bare er én mulig løsning, nemlig midtpunktet til det store rektangelet, mens andre vil prøve vilkårlig. Etter hvert vil de oppdage at punktet må ligge på diagonalen til det store rektangelet.



Figur 6: Rektangler i et rektangel.

Observasjonene fra utforskningen kan støtte elevene i arbeidet med å bevise sammenhengen. Hva er det som er spesielt med figuren når punktet ligger på diagonalen? Oppfordre elevene til å tegne diagonalen og studere hvordan den deler det store rektangelet.

#### Oppsummering

De tre eksemplene viser hvordan elevene kan oppdage geometriske sammenhenger med god støtte av *Penn*-verktøyet. Utgangspunktet kan være en enkel figur som en trekant, eller mer avanserte figurer, avhengig av elevenes GeoGebra-kompetanse. Å bruke *Penn* kan gjøre det lettere for elevene å få et visuelt bilde av observasjonene sine, og deretter lage en hypotese. Det er viktig å poengtere for elevene at selv om hypotesen stemmer når de tester den i GeoGebra, så er det ikke et bevis for den matematiske sammenhengen. Slike oppdagelser kan imidlertid gjøre at elevene blir nysgjerrige og har lyst til å bevise sammenhengene selv.

På [matematikkcenteret.no/GeoGebra](http://matematikkcenteret.no/GeoGebra) har vi publisert flere undervisningsopplegg som viser hvordan elevene kan bruke GeoGebra til å utforske matematiske sammenhenger.

#### Note

- 1 En figur er dynamisk hvis jeg kan dra i figuren slik den endrer form, samtidig som den beholder gitte egenskaper. For eksempel vil et dynamisk rektangel alltid være et rektangel, selv om jeg drar i hjørnene.

#### Referanser

- Brunström, M. (2015). *Matematiska resonemang i en lärandemiljö med dynamiske matematikprogram*. Karlstad University Studies.