*mandag, 19. juli 2021*

**Oppgave 1.** La $n \geqslant 100$ være et heltall. Nils skriver tallene $n, n+1, \ldots, 2n$ på hvert sitt kort. Deretter stokker han disse $n+1$ kortene, og deler dem i to bunker. Vis at minst én av bunkene inneholder to kort hvis påskrevne tall har et kvadrattall som sum.

**Oppgave 2.** Vis at ulikheten

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

holder for alle reelle tall $x_1, \ldots, x_n$.

**Oppgave 3.** La $D$ være et indre punkt i den spissvinklede trekanten $ABC$ med $AB > AC$ slik at $\angle DAB = \angle CAD$. Punktet $E$ på linjestykket $AC$ tilfredsstiller $\angle ADE = \angle BCD$, punktet $F$ på linjestykket $AB$ tilfredsstiller $\angle FDA = \angle DBC$, og punktet $X$ på linjen $AC$ tilfredsstiller $CX = BX$. La $O_1$ og $O_2$ være omsentrene til trekantene henholdsvis $ADC$ og $EXD$. Vis at linjene $BC$, $EF$ og $O_1O_2$ skjærer hverandre i ett punkt.



*Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter.*
*Hver oppgave er verdt 7 poeng.*

*tirsdag, 20. juli 2021*

**Oppgave 4.** La $\Gamma$ være en sirkel med sentrum $I$, og $ABCD$ en konveks firkant slik at hvert av linjestykkene $AB$, $BC$, $CD$ og $DA$ tangerer $\Gamma$. La $\Omega$ være omsirkelen til trekanten $AIC$. Forlengelsen av $BA$ bortenfor $A$ skjærer $\Omega$ i $X$, og forlengelsen av $BC$ bortenfor $C$ skjærer $\Omega$ i $Z$. Forlengelsene av $AD$ og $CD$ bortenfor $D$ skjærer $\Omega$ i henholdsvis $Y$ og $T$. Vis at

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

**Oppgave 5.** To ekorn, Niels og Henrik, har samlet 2021 valnøtter før vinteren. Niels nummererer valnøttene fra 1 til 2021, og graver 2021 hull i bakken langs en sirkel rundt favorittreet deres. Neste morgen legger Niels merke til at Henrik har plassert én valnøtt i hvert av hullene, men uten å bry seg om nummereringen. Misfornøyd bestemmer Niels seg for å omplassere valnøttene ved å utføre en serie av 2021 trekk. I trekk $k$ bytter Niels om de to nabovalnøttene til valnøtt $k$. Vis at det finnes en verdi av $k$ slik at Niels i trekk $k$ bytter om to valnøtter $a$ og $b$ slik at $a < k < b$.

**Oppgave 6.** La $m \geqslant 2$ være et heltall, $A$ en mengde av (ikke nødvendigvis positive) heltall, og $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ delmengder av $A$. Anta at for enhver $k = 1, 2, \ldots, m$ er summen av elementene i $B_k$ lik $m^k$. Vis at $A$ inneholder minst $m/2$ elementer.



*Tid til disposisjon: 4 timer og 30 minutter.*
*Hver oppgave er verdt 7 poeng.*