Niels Henrik Abels matematikkonkurranse: Finale 2020–2021

8. mars 2021 (bokmål)

Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (åtte punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. **Begynn på nytt ark for hver av de fire oppgavene.** Svarene må skannes for å bli sendt til juryen, så bruk skriveredskaper som gir god lesbarhet.

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper (inklusive passer og linjal, men ikke gradskive) og tospråklige ordbøker er tillatt.

Ikke skriv navnet ditt på svararket, men skriv det i stedet på et eget ark som du legger øverst i besvarelsen. Juryen vil ikke få se dette arket.

Oppgave 1

a. En $3n$-*tabell* er en tabell med tre rader og n kolonner som inneholder alle tallene $1, 2, \ldots, 3n$. En slik tabell kalles *ryddig* dersom de n tallene i *første rad* står i stigende rekkefølge fra venstre mot høyre, og de tre tallene i *hver kolonne* står i stigende rekkefølge ovenfra og ned. Hvor mange ryddige $3n$-tabeller finnes det?

b. Pål har flere høner enn han klarer å holde styr på. Derfor har han et kartotekkort for hver av hønene sine. Han oppbevarer kortene i ti bokser, som har plass til 2021 kort i hver boks.

Dessverre er Pål veldig rotete, så han kan komme til å rote bort noen bokser. Derfor lager han flere kopier av hvert kort og sprer dem på forskjellige bokser, slik at selv om han bare kan finne sju av boksene, uansett *hvilke* sju, så vil likevel disse sju boksene til sammen inneholde minst ett kort for hver av hønene hans.

Hva er største mulige antall høner Pål kan holde greie på med dette systemet?

Oppgavene fortsetter på neste side

Oppgave 2

a. Vis at for alle $n \geq 3$ finnes det n forskjellige positive heltall $x_1, \ldots, x_n$ som er slik at

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

b. Dersom $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ er reelle tall slik at $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \leq 1$ og $b_1^2 + \cdots + b_n^2 \leq 1$, vis at

$$\bigl(1 - (a_1^2 + \cdots + a_n^2)\bigr)\bigl(1 - (b_1^2 + \cdots + b_n^2)\bigr) \leq \bigl(1 - (a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)\bigr)^2$$

Oppgave 3

a. For hvilke heltall $0 \leq k \leq 9$ finnes det positive heltall m og n slik at tallet $3^m + 3^n + k$ er et kvadrattall?

b. Vi sier at en mengde S av naturlige tall er *synkron* dersom sifrene i a^2 er de samme (i forekomst og antall, om enn i forskjellig rekkefølge) for alle tall a i S. For eksempel er $\{13, 14, 31\}$ synkron, siden $\{13^2, 14^2, 31^2\} = \{169, 196, 961\}$. Men $\{119, 121\}$ er ikke synkron, for $119^2 = 14161$ og $121^2 = 14641$ har de samme sifrene, men i forskjellig antall. Vis at det finnes en synkron mengde med 2021 forskjellige naturlige tall.

Oppgave 4

a. I et tetraeder $ABCD$ er $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAB = 90^\circ$. Vis at arealet til sideflatene oppfyller ligningen

$$\operatorname{areal}(BAC)^2 + \operatorname{areal}(CAD)^2 + \operatorname{areal}(DAB)^2 = \operatorname{areal}(BCD)^2.$$

b. Tangenten i C til den omskrevne sirkelen til trekanten ABC skjærer linjen gjennom A og B i et punkt D. To ulike punkter E og F på linjen gjennom B og C er slik at

$$|BE| = |BF| = \frac{\bigl||CD|^2 - |BD|^2\bigr|}{|BC|}.$$

Vis at enten $|ED| = |CD|$ eller $|FD| = |CD|$.