Niels Henrik Abels matematikkonkurranse: Finale 2021–2022

8. mars 2022 (bokmål)

Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (sju punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. **Begynn på nytt ark for hver av de fire oppgavene.**

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Tillatte hjelpemidler er kladdepapir, tospråklige ordbøker og skrivered-skaper inklusive passer og linjal, men ikke gradskive.

Oppgave 1

a. Bestem alle positive heltall n som er slik at $2022 + 3^n$ er et kvadrattall.

b. Finn alle primtall p og positive heltall n som er slik at

$$n\,5^{n-n/p} = p!\,(p^2+1) + n$$

(merk: $p! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot p$)

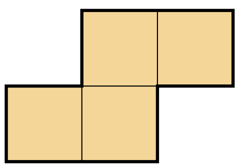
Oppgave 2

a. I en trekant ABC med omsirkel ω er $|AB| > |AC|$. Punktene X og Y på ω er forskjellig fra A, slik at linjen AX går gjennom midtpunktet på BC, AY er vinkelrett på BC, og XY er parallell med BC. Bestem $\angle BAC$.

b. To trekanter ABC og DEF har parvis parallelle sider: $EF \parallel BC$, $FD \parallel CA$ og $DE \parallel AB$. Linjen m_A er refleksjonen av EF over BC, og likeledes er m_B refleksjonen av FD over CA, og m_C refleksjonen av DE over AB. Anta at linjene m_A, m_B og m_C møtes i et felles punkt. Hva er forholdet mellom arealene til trekantene ABC og DEF?

Oppgave 3

Nils har et $M \times N$ rutenett der M og N er positive heltall, og en brikke som vist i figuren. Hva er det minste antall ruter Nils må fargelegge, slik at det er umulig å plassere brikken på rutenettet uten å dekke en fargelagt rute? Brikken kan roteres og speiles fritt, men den må dekke fire ruter fullstendig.



Oppgave 4

a. Finn alle funksjoner $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ som er slik at

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 - \frac{\sqrt{f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)}}{x} \geq x^2 f(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}^+$, der $\mathbb{R}^+$ er mengden av positive reelle tall.

b. Finnes det 2022 polynomer med reelle koeffisienter, hver av grad lik 2021, slik at de $2021 \cdot 2022 + 1$ koeffisientene i produktet deres blir like?