Niels Henrik Abels matematikkonkurranse: Finale 2021–2022

8. mars 2022 (nynorsk)

I finalen i Abelkonkurransen er det fire oppgåver (sju punkt) som skal løysast på fire timar. Svara skal grunngivast og førast på eigne ark. **Begynn på nytt ark for kvar av dei fire oppgåvene.**

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Maksimal poengsum er såleis 40.

Tillatne hjelpemiddel er kladdepapir, tospråklege ordbøker og skrivereiskapar inklusive passar og linjal, men ikkje gradskive.

Oppgåve 1

a. Bestem alle positive heiltal n som er slik at $2022 + 3^n$ er eit kvadrattal.

b. Finn alle primtal p og positive heiltal n som er slik at

$$n\,5^{n-n/p} = p!\,(p^2 + 1) + n$$

(merk: $p! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p$)

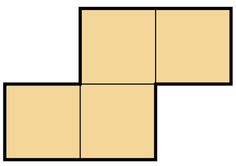
Oppgåve 2

a. I ein trekant ABC med omsirkel ω er $|AB| > |AC|$. Punkta X og Y på ω er forskjellig frå A, slik at linja AX går gjennom midtpunktet på BC, AY er vinkelrett på BC, og XY er parallell med BC. Bestem $\angle BAC$.

b. To trekantar ABC og DEF har parvis parallelle sider: $EF \parallel BC$, $FD \parallel CA$ og $DE \parallel AB$. Linja m_A er refleksjonen av EF over BC, og like eins er m_B refleksjonen av FD over CA, og m_C refleksjonen av DE over AB. Anta at linjene m_A, m_B og m_C møtast i eit felles punkt. Kva er forholdet mellom areala til trekantane ABC og DEF?

Oppgåve 3

Nils har eit $M \times N$ rutenett der M og N er positive heiltal, og ei brikke som vist i figuren. Kva er det minste talet ruter Nils må fargelegge, slik at det er umogleg å plassere brikka på rutenettet utan å dekke ei fargelagd rute? Ein kan rotere og spegle brikka fritt, men ho må dekke fire ruter fullstendig.



Oppgåve 4

a. Finn alle funksjonar $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ som er slik at

$$f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1 - \frac{\sqrt{f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)}}{x} \geq x^2 f(x)$$

for alle $x \in \mathbb{R}^+$, der $\mathbb{R}^+$ er mengda av positive reelle tal.

b. Finst det 2022 polynom med reelle koeffisientar, kvart av grad lik 2021, slik at dei $2021 \cdot 2022 + 1$ koeffisientane i produktet deira blir like?