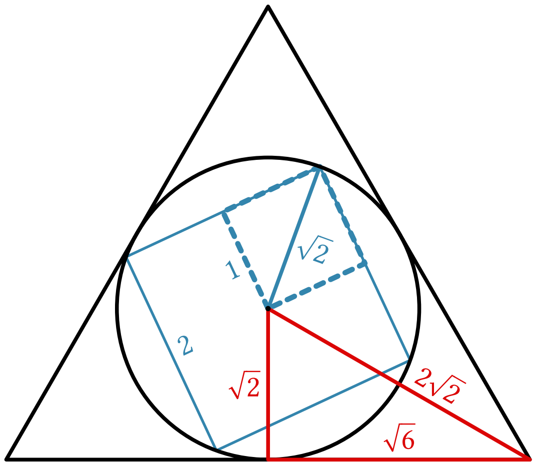
# Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
## Andre runde 2022–2023 – *Løsninger*

19. januar 2023

**Oppgave 1.** Alle tallene i oppgaven er toerpotenser: $256 = 2^8$, $512 = 2^9$ og $4096 = 2^{12}$. Først er $256^a = 512^b$, altså $2^{8a} = 2^{9b}$, slik at $8a = 9b$. Siden $a$ og $b$ ikke har felles primfaktorer og 8 og 9 ikke heller, må $a = 9$ og $b = 8$. (Detaljert: Siden $8 \mid 9b$, der streken står for «går opp i», og 8 og 9 ikke har felles faktorer, må $8 \mid b$. Og fordi $b \mid 8a$ og $a$, $b$ ikke har felles faktorer, må $b \mid 8$. Tilsammen gir disse to at $b = 8$. Det følger direkte at $a = 9$, eller du kan vise det på samme måte.) Samme resonnement gir $9c = 12d$, men siden 9 og 12 har en felles faktor 3, må dette forkortes til $3c = 4d$, og dermed $c = 4$ og $d = 3$. Til sist er $12e = 8f$, så $3e = 2f$, og $e = 2$, $f = 3$. Dermed er $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 = 9^2 + 8^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 3^2 = 183$. . . . . . . . . . **183**

**Oppgave 2.** Sirkelen har radius $r = \sqrt{2}$, som du ser fra det stiplede kvadratet i figuren. Den røde trekanten er en 30–60–90-trekant, så hypotenusen er dobbelt så lang som den korteste kateten, altså $2\sqrt{2}$. Pytagoras gir da $\sqrt{6}$ for den lange kateten. (Eller du kan benytte at forholdet mellom katetene i en 30–60–90-trekant er $\sqrt{3}$.) Sidelengden i den likesidete trekanten er dobbelt så stor, altså $2\sqrt{6}$. Kvadratet av dette blir 24. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **24**




**Oppgave 3.** Ta sifrene 123456789 og stryk et vilkårlig utvalg av dem (kan hende ingen, men ikke alle). Det kan gjøres på $2^9 - 1 = 511$ måter, der vi trakk fra 1 fordi vi ikke kan stryke alle sifrene. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **511**

**Oppgave 4.** Skriv $f(x) = ax^2 + bx + c$, med $c = 123456$. Når $f(s) = f(t)$ (med $s = 2525$ og $t = 5252$), er $0 = f(s) - f(t) = a(s+t)(s-t) + b(s-t)$ ved konjugatsetningen. Forkorting med $s - t \neq 0$ gir $s + t = -b/a$, så $f(7777) = f(s+t) = a(s+t)(-b/a) + b(s+t) + c = c$.

*Alternativ løsning*: Grafen til andregradspolynomet $f$ er symmetrisk om en linje $x = c$. Fordi $f(2525) = f(5252)$, må $c$ være middelverdien av 2525 og 5252, altså $c = \frac{7777}{2}$. Men da ligger 7777 og 0 symmetrisk om $c$, så $f(7777) = f(0) = 123456$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **720**

**Oppgave 5.** Dersom $q = r$ får vi $q \mid p + 2q$ (streken betyr «går opp i»), men da må $q \mid p$. Siden begge er primtall, må $p = q$, så alle tre er like. Mer generelt, om to av de tre tallene er like, er alle tre like (fordi vi kan bytte om på de tre tallene som vi vil uten å endre noe.) Det er klart at betingelsene er oppfylt om $p = q = r$.

Vi må undersøke tilfellet der alle tre er forskjellige. Men dersom to eller flere distinkte primtall går opp i et tall $n$, så vil også produktet av disse primtallene gå opp i $n$. I vårt tilfelle betyr det at $pqr \mid p + q + r$. Om $r$ er det største av de tre primtallene, er $p + q + r < 3r$, men samtidig er $pqr \geq 6r$, siden de minste mulighetene for $p$ og $q$ er 2 og 3. Altså er $p + q + r < pqr$, så det finnes ingen eksempler med $p$, $q$ og $r$ forskjellige.

Vi står altså bare igjen med tilfellene $p = q = r$. Da er $pqr = p^3$. Siden $11^3 = 1331 < 2023$ og $13^3 = 2197 > 2023$, må $p = 11$, og $p + q + r = 3p = 33$.
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **33**

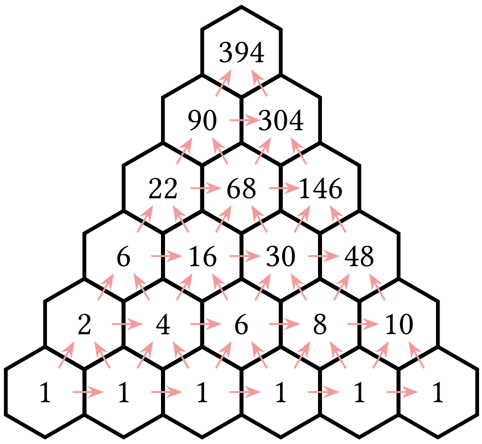
**Oppgave 6.** Hvert kort må få enten to oddetall eller to partall. Med andre ord må Nils dele opp oddetallene i par, og det samme med partallene.

Skriv $p_n$ for antall måter å dele en mengde med $2n$ elementer i $n$ par. Så er $p_1 = 1$. Dersom $n \geq 2$, velger du først ett element å lage et par av. (Det spiller ingen rolle hvilket, og du skal ikke telle med antall valgmuligheter for dette, for alle elementer skal jo med i et par, og vi bryr oss ikke om hvordan parene ordnes.) Du har $2n - 1$ valg for det andre elementet. Deretter kan du dele de øvrige $2n - 2$ elementene i par på $p_{n-1}$ måter. Det følger at $p_n = (2n - 1)p_{n-1}$. Spesielt er $p_3 = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$. Altså har Nils 15 muligheter for kortene med oddetall, og like mange for de med partall, i alt $15^2 = 225$ muligheter.

*Alternativ løsning*: Vi ser bare på oddetallskortene. Nils kan gå frem som følger: Han skriver oddetallene i vilkårlig rekkefølge, for eksempel $3, 7, 1, 9, 11, 5$, og så slår han sammen to og to par: $(3, 7), (1, 9), (11, 5)$ og skriver tallene i hvert par på hver sin side av et kort. Han kan gjøre dette på $6!$ måter. Men hvert par kan ordnes på to måter, med samme sluttresultat, så vi må dele på $2^3 = 8$. I tillegg kan de tre tallparene ordnes på $3! = 6$ måter, og alle de gir også samme resultat. Så oddetallskortene gir $\frac{6!}{6 \cdot 8} = 15$ muligheter. Partallskortene håndteres på samme måte, og løsningen avsluttes på samme måte som ovenfor. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **225**

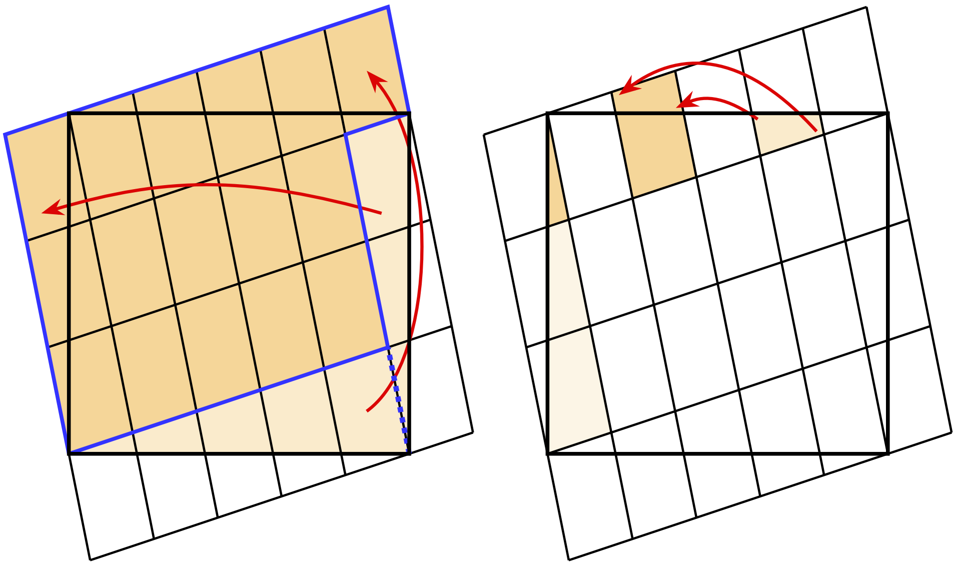
**Oppgave 7.** Benytt primtallsfaktoriseringen $2023 = 7 \cdot 17^2$. Produktet går opp i $\frac{(a+k)!}{a!} = (a+k)(a+k-1)\cdots(a+1)$ presis når 7 går opp i en av faktorene $a+1$, …, $a+k$, og enten 17 går opp i minst to av dem, eller $17^2$ går opp i minst en av dem. Denne betingelsen er oppfylt for $k \geq 34$ (vi trenger ikke se på $17^2$, må bare sikre oss to multipler av 17). Den holder ikke for $k = 33$: Ett eksempel er $a = 17$, siden 17 bare går opp i ett av tallene 18, …, 50 (nemlig 34 – men den bommer akkurat på 17 og 51). . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **33**

**Oppgave 8.** Start nederst til venstre, og marker hver celle med antall måter du kan komme til cellen på fra A. I figuren er tallet i hver celle unntatt celle A lik summen av tallene i cellen til venstre og de to naboene i raden under. . . . . . . . . . . . . . . . . . . **394**




**Oppgave 9.** Prøv å lage fullstendige kvadrater: Skriv ligningen på formen $4m^2 - 4mn + n^2 - m^2 - 2m - 1 = 799$, det vil si $(2m-n)^2 - (m+1)^2 = 799$. Bruk så konjugatsetningen, og få $(2m-n+m+1)(2m-n-m-1) = 799$, forenklet $(3m-n+1)(m-n-1) = 799$. Forskjellen mellom de to faktorene på venstresiden er $2m+2$, som vi må prøve å gjøre størst mulig. Det kan ikke gjøres bedre enn $3m-n+1 = 799$ og $m-n-1 = 1$. Etter den siste ligningen er da $n = m-2$. Sett det inn i den første ligningen, og få $2m+3 = 799$, altså $m = 398$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **398**

**Oppgave 10.** Utvid det skrå rutenettet litt for å se bedre hva som foregår. Ved å flytte to trekanter ut av kvadratet som vist i figuren til venstre, får vi akkurat 16 småfirkanter fra rutenettet. Så dersom hver småfirkant har areal $A$, har kvadratet areal $16A$.



Om vi flytter den høyre delen av det skyggelagte området og roterer den 180° som vist i figuren til høyre, får vi en hel småfirkant, areal $A$.

Om vi forstørrer den lille trekanten oppe til venstre med en faktor 3 (så arealet blir ni ganger så stort), får vi halvparten av tre småfirkanter, altså med areal $\frac{3}{2}A$. Det betyr at den lille trekanten har areal $\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2}A = \frac{1}{6}A$, så hele det opprinnelig skyggelagte området har areal $\frac{7}{6}A$. Det er oppgitt at dette arealet er 70, så kvadratet har areal $16A = 16 \cdot \frac{6}{7} \cdot 70 = 960$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . **960**