Niels Henrik Abels matematikkonkurranse: Finale 2022–2023

7. mars 2023 (bokmål)

Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (åtte punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. **Begynn på nytt ark for hver av de fire oppgavene.**

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Tillatte hjelpemidler er kladdepapir, tospråklige ordbøker og skrivredskaper inklusive passer og linjal, men ikke gradskive.

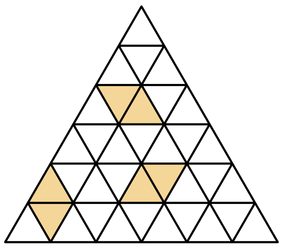
Oppgave 1

a. I trekanten ABC ligger X på siden BC, Y på siden CA og Z på siden AB slik at $YX \parallel AB$, $ZY \parallel BC$ og $XZ \parallel CA$. Vis at X, Y og Z er midtpunktet på hver sin side i ABC.

b. I trekanten ABC ligger punktene D og E på siden BC, med $CE = BD$. M er midtpunktet på AD. Vis at tyngdepunktet til ABC ligger på ME.

Oppgave 2

a. Sidene i en likesidet trekant med sidelengde n er delt inn i deler av lengde 1 hver, og linjer trukket gjennom delepunktene parallelt med trekantsidene deler den store trekanten i mange småtrekanter. Nils har en haug med rombiske fliser med sidekant 1 og vinkler 60° og 120°, og vil flislegge mest mulig av trekanten med disse, slik at hver flis dekker to småtrekanter og uten at flisene overlapper. I figuren er tre fliser plassert litt tilfeldig for å illustrere. Hvor mange fliser kan Nils få plass til innenfor den store trekanten?



b. Arne og Berit spiller et spill. De har på forhånd valgt positive heltall m og n med $n \geq 4$ og $m \leq 2n + 1$. Arne velger først et tall fra mengden $\{1, 2, \dots, n\}$ og skriver det opp på en tavle. Deretter velger Berit et annet tall fra samme mengde, og skriver det på tavlen. Slik fortsetter de annenhver gang, alltid med tall som ikke står på tavlen fra før. Når summen av alle tallene på tavlen er m eller større, er spillet over, og den som skrev det siste tallet har vunnet. For hvilke valg av m og n har Arne en vinnende strategi?

Oppgave 3

a. Finn alle ikkenegative heltall n, a og b slik at

$$2^a + 5^b + 1 = n!\,.$$

b. Finn alle heltall a og b slik at

$$\begin{aligned} a^6 + 1 &\mid b^{11} - 2023b^3 + 40b \quad \text{og} \\ a^4 - 1 &\mid b^{10} - 2023b^2 - 41. \end{aligned}$$

(Gitt heltall u og v, betyr notasjonen $u \mid v$ at det finnes et heltall c slik at $uc = v$.)

Oppgave 4

a. Dersom a, b og c er sidelengdene i en trekant, vis at

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca} > 2.$$

Vis også at ulikheten ikke nødvendigvis holder dersom du erstatter 2 (på høyre side) med et større tall.

b. Finn alle funksjoner $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ som er slik at

$$f\big(f(x) + y\big) = f(y) + x \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}_+.$$

(Her er $\mathbb{R}_+$ mengden av alle reelle tall $x > 0$.)