Niels Henrik Abels matematikkonkurranse: Finale 2022–2023

7. mars 2023 (nynorsk)

I finalen i Abelkonkurransen er det fire oppgåver (åtte punkt) som skal løysast på fire timar. Svara skal grunngivast og førast på eigne ark. **Begynn på nytt ark for kvar av dei fire oppgåvene.**

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Maksimal poengsum er såleis 40.

Tillatne hjelpemiddel er kladdepapir, tospråklege ordbøker og skrivereiskapar inklusive passar og linjal, men ikkje gradskive.

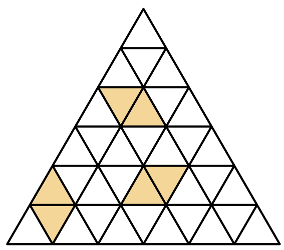
Oppgåve 1

a. I trekanten ABC ligg X på sida BC, Y på sida CA og Z på sida AB slik at $YX \parallel AB$, $ZY \parallel BC$ og $XZ \parallel CA$. Vis at X, Y og Z er midtpunktet på kvar si side i ABC.

b. I trekanten ABC ligg punkta D og E på sida BC, med $CE = BD$. M er midtpunktet på AD. Vis at tyngdepunktet til ABC ligg på ME.

Oppgåve 2

a. Sidene i ein likesida trekant med sidelengd n er delt inn i delar av lengd 1 kvar, og linjer trukke gjennom delepunkta parallelt med trekantsidene deler den store trekanten i mange småtrekantar. Nils har ein haug med rombiske fliser med sidekant 1 og vinklar 60° og 120°, og vil flislegge mest mogleg av trekanten med desse, slik at kvar flis dekker to småtrekantar og utan at flisene overlappar. I figuren er tre fliser plassert litt tilfeldig for å illustrere. Kor mange fliser kan Nils få plass til innafor den store trekanten?



b. Arne og Berit spelar eit spel. Dei har på førehand valt positive heiltal m og n med $n \geq 4$ og $m \leq 2n+1$. Arne vel først eit tal frå mengda $\{1, 2, \ldots, n\}$ og skriv det opp på ei tavle. Deretter vel Berit eit anna tal frå same mengd, og skriv det på tavla. Slik fortset dei annankvar gong, alltid med tal som ikkje står på tavla frå før. Når summen av alle tala på tavla er m eller større, er spelet over, og den som skreiv det siste talet har vunne. For kva val av m og n har Arne ein vinnande strategi?

Oppgåve 3

a. Finn alle ikkjenegative heiltal n, a og b slik at

$$2^a + 5^b + 1 = n!\,.$$

b. Finn alle heiltal a og b slik at

$$\begin{aligned} a^6 + 1 &\mid b^{11} - 2023b^3 + 40b \quad \text{og} \\ a^4 - 1 &\mid b^{10} - 2023b^2 - 41. \end{aligned}$$

(Gitt heiltal u og v, betyr notasjonen $u \mid v$ at det finst eit heiltal c slik at $uc = v$.)

Oppgåve 4

a. Dersom a, b og c er sidelengdene i ein trekant, vis at

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{ca} > 2.$$

Vis òg at ulikskapen ikkje nødvendigvis held dersom du erstattar 2 (på høgre side) med eit større tal.

b. Finn alle funksjonar $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ som er slik at

$$f\big(f(x) + y\big) = f(y) + x \quad \text{for alle } x, y \in \mathbb{R}_+.$$

(Her er $\mathbb{R}_+$ mengda av alle reelle tal $x > 0$.)