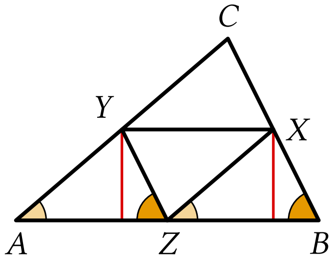
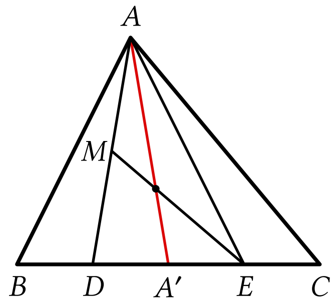
Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Finale 2022–2023 – *Løsninger*

7. mars 2023

Oppgave 1.



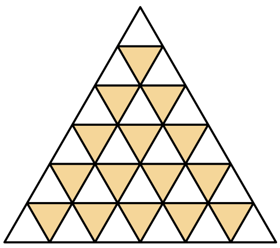
a. Fordi $XZ \parallel CA$, er $\angle BAC = \angle BZX$. Og fordi $ZY \parallel BC$, er $\angle CBA = \angle YZA$. Dermed er de to trekantene AZY og ZBX likeformede. Men de har også samme høyde over linjen AB, så de er kongruente. Dermed er $AZ = ZB$, så Z er midtpunktet på AB. Samme resonnement gir at X er midtpunktet på BC og Y er midtpunktet på CA.

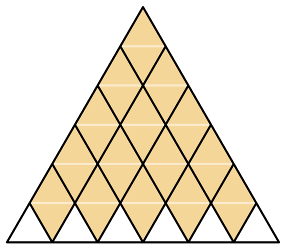


b. Midtpunktet A' på linjestykket BC er også midtpunkt på linjestykket DE, så trekantene ABC og ADE har samme tyngdepunkt, nemlig på medianen AA', $2/3$ av avstanden fra A til A'. Fordi ME også er en median i ADE, passerer den gjennom dette felles tyngdepunktet.

Oppgave 2.

a. Om vi farger annenhver småtrekant etter mønsteret i figuren til venstre, er i alt $1+2+\cdots+(n-1) = n(n-1)/2$ småtrekanter farget. Hver flis må dekke en farget og en hvit småtrekant, så det er ikke plass til mer enn $n(n-1)/2$ fliser. Vi kan lett plassere flisene slik at de dekker alle fargede småtrekanter, som vist i figuren til høyre.





b. Det kan være enklere om vi holder regnskap med differansen $d = m - s$, der s er summen av tallene på tavlen. Altså: Vi starter med $d = m$, og trekker fra tallene som skrives på tavlen inntil $d \le 0$.

Vi kan også skrive S for mengden av tall i $\{1, \dots, n\}$ som ikke er skrevet på tavlen ennå, og $\max S$, $\min S$ for det største og minste tallet i S.

Når vi kaller den ene spilleren X, er Y motspilleren.

Anta at X står for tur. Dersom $\max S \ge d$, sier vi at X *vinner øyeblikkelig* (ved simpelthen å skrive tallet $\max S$). Dersom $\max S < d \le \max S + \min S$, sier vi at X *taper øyeblikkelig*, fordi Y *vinner øyeblikkelig* i neste trekk samme hva X gjør. Dersom X ikke vinner *øyeblikkelig*, men kan spille slik at Y taper *øyeblikkelig* i neste trekk, sier vi at X *vinner raskt.*

I analysen finner vi ofte at X bare har ett mulig valg for å hindre at Y *vinner raskt* i neste runde. I så fall sier vi at X *må* gjøre dette valget.

Det er opplagt at dersom $m \le n$, vinner Arne *øyeblikkelig*.

Dersom $m = n + 1$, taper Arne *øyeblikkelig*.

Dersom $n+2 \le m \le 2n$, vinner Arne *raskt* ved å skrive opp $k = m-(n+1)$, slik at $d = n + 1$ etterpå. (Da er $1 \le k \le n - 1$, så $\max S = n$ mens $\min X \in \{1, 2\}$.)

Heretter antar vi at $m = 2n+1$. Vi oppsummerer hva vi kommer til å oppdage i det tilfellet:

Arne taper dersom n er odde, eller mer generelt dersom $n = 2^j n'$ der n' er et oddetall og j er et partall. Ellers vinner han.

For å se det, begynner vi med starten av spillet, uten andre antagelser enn $m = 2n + 1$.

Dersom Arne skriver opp n, vinner Berit *raskt* ved å skrive opp 1: For da blir $d = n$ og $S = \{2, \dots, n - 1\}$, og Arne taper *øyeblikkelig*. Men dersom Arne skriver opp k med $1 \le k < n$ og Berit skriver opp $n - k$, så vinner også Berit *raskt*, for nå er $d = n + 1$ og $\max S = n$, $\min S \in \{1, 2\}$. Uheldigvis for Berit, kan hun ikke gjør dette dersom $n - k = k$, altså dersom $n = 2k$. Så langt vet vi altså at Arne taper dersom n er odde.

Anta nå at n er et partall. Analysen i forrige avsnitt viser at Arne *må* skrive opp $n/2$. Mer generelt viser det seg at Arne og Berit *må* skrive tallene $n/2$, $n/4$, …, $n/2^j$ i tur og orden så lenge disse tallene er heltall. Den første som ikke kan det, taper.

For å se dette, går vi frem ved induksjon. Vi antar at $n = 2^j n'$ for et heltall

n' (ikke nødvendigvis odde), og at Arne og Berit i tur og orden *måtte* skrive opp tallene $n/2^i$ for $i = 1, \ldots, j$. Vi har allerede sett dette for $j = 1$. Nå er $d = 2n + 1 - (n/2^1 + \cdots + n/2^j) = (1 + 2^{-j})n + 1$, og det er X sin tur (X er Arne hvis j er et partall, ellers er det Berit som er X).

Dersom X velger et tall $k > 2^{-j}n$, blir ny $d < n + 1$, og Y vinner *øyeblikkelig* i neste runde (husk at n ikke har vært brukt). Så *X må* velge et tall $k < 2^{-j}n$. Deretter kan Y velge $2^{-j}n - k$ dersom det går an, som gjør at $d = n + 1$, og X taper *øyeblikkelig* i neste runde. For å hindre det, *må* X velge $k = 2^{-j-1}n$. Hvis $2^{-j}n$ er et oddetall, kan ikke X det, så X taper. Men hvis $2^{-j}n$ er et partall, fortsetter spillet til neste runde. Det fullfører induksjonstrinnet. (Fyll inn flere detaljer selv om du føler behov for det.)

Oppsummert: Arne vinner (har en vinnende strategi) dersom $m \leq n$, eller $n + 2 \leq m \leq 2n$, eller både $m = 2n + 1$ og $n = 2^j n'$ med j og n' oddetall. I motsatt fall vinner Berit.

Oppgave 3.

a. Det er ingen løsning med $a = 0$, for da er venstresiden et oddetall ≥ 3, men $n!$ er partall når $n > 1$.

Vi prøver $a = 1$, altså $5^b + 3 = n!$. Vi får ingen løsning med $b = 0$, og om $b > 0$ må da $n! \equiv 3 \pmod 5$. Men $n! \equiv 0 \pmod 5$ for $n \geq 5$, så vi måtte ha $n < 5$. Det gir $n! \in \{1, 2, 6, 24\}$, men ingen av dem har formen $5^b + 3$.

Om $a \geq 2$ får vi $n! \equiv 2 \pmod 4$, som kun er sann for $n = 3$ (for alle større n er $n! \equiv 0 \pmod 4$). Ligningen $2^a + 5^b + 1 = 6$ har løsningen $a = 2$, $b = 0$.

Alt i alt er $a = 2$, $b = 0$, $n = 3$ eneste løsning.

b. Først er det lett å se at $a = 0$ og vilkårlig heltall b oppfyller betingelsene. Heretter antar vi $a \neq 0$. De to venstresidene har en felles faktor $a^2 + 1$, siden $a^6 + 1 = (a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$ og $a^4 - 1 = (a^2 + 1)(a^2 - 1)$. Dermed går $a^2 + 1$ opp i begge høyresidene, og da også i kombinasjonen $h_1 - bh_2$, der h_1, h_2 er de to høyresidene. Det gir at $a^2 + 1 \mid 81\,b$. Men 3 er ikke en faktor i $a^2 + 1$, fordi a^2 er kongruent med 0 eller 1 modulo 3. Siden $81 = 3^4$, følger at $a^2 + 1 \mid b$. Men siden $a^2 + 1 \mid h_2$, følger av det at $a^2 + 1 \mid 41$. Det er ikke tilfelle når $a \neq 0$, så det er ikke flere løsninger.

Oppgave 4.

a. Skriv $a = y + z$, $b = z + x$ og $c = x + y$ der $x > 0$, $y > 0$ og $z > 0$. Her passer det å innføre syklisk summasjon: $\sum^\circ$ indikerer at vi skal summere tre ledd, der vi suksessivt erstatter a med b, b med c, c med a, x med y, y med z og z med x. For eksempel er $\sum^\circ abx = abx + bcy + caz$, og uttrykket oppgaven spør om er

$$f = \sum\nolimits^\circ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} = \sum\nolimits^\circ \frac{(a^2 + b^2 - c^2)c}{abc}.$$

Siden nevneren abc er den samme i alle de tre leddene i summen, tar vi den utenfor, og finner

$$\begin{aligned} abcf &= \sum\nolimits^\circ \big((y+z)^2 + (x+z)^2 - (x+y)^2\big)(x+y) \\ &= 2\sum\nolimits^\circ (z^2 + yz + xz - xy)(x+y) \\ &= 2\sum\nolimits^\circ (z^2x + x^2z - x^2y + yz^2 + y^2z - xy^2 + 2xyz). \end{aligned}$$

Nå utnytter vi at $\sum^\circ(x^2y + xy^2) = \sum^\circ(y^2z + yz^2) = \sum^\circ(z^2x + zx^2)$, så dette forenkles til

$$\begin{aligned} abcf &= 2\sum\nolimits^\circ (x^2y + xy^2 + 2xyz) \\ &= 2(x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + z^2x + zx^2 + 6xyz) \\ &= 2(x+y)(y+z)(z+x) + 8xyz = 2abc + 8xyz > 2abc, \end{aligned}$$

slik at $f > 2$. Brøken $xyz/(abc)$ kan gjøres så liten vi vil, for eksempel ved å velge $y = z = 1$ og x liten: Da blir jo $xyz/(abc) = x/(2(1+x)^2) < x/2$, så $f < 2 + x/2$. Derfor kan vi ikke erstatte 2 med et mindre tall i ulikheten.

En alternativ fremgangsmåte er å benytte cosinus-setningen: Om α, β og γ er vinklene motsatt sidene med lengde a, b og c, er $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ og tilsvarende for α og β. Vi må altså vise

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \ge 1,$$

der $\alpha > 0$, $\beta > 0$ og $\gamma > 0$ med $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. Vi kan begynne med

$$\begin{aligned} \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\big(\tfrac12(\alpha+\beta)\big)\cos\big(\tfrac12(\alpha-\beta)\big) \\ &> 2\cos^2\big(\tfrac12(\alpha+\beta)\big) = 2\cos^2\big(90^\circ - \tfrac12\gamma\big) = 2\sin^2\big(\tfrac12\gamma\big), \end{aligned}$$

der ulikheten kommer fra $|\alpha - \beta| < \alpha + \beta < 180^\circ$ og det at cos er symmetrisk og avtagende i $[0, 180^\circ]$. Dermed er

$$\begin{aligned} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma &> 2\sin^2\big(\tfrac12\gamma\big) + \cos\gamma \\ &= 2\big(1 - \cos^2\big(\tfrac12\gamma\big)\big) + 2\cos^2\big(\tfrac12\gamma\big) - 1 = 1. \end{aligned}$$

Vi kan få uttrykket så nær 1 vi vil, for eksempel ved å velge $\alpha = 2\delta$ og $\beta = \gamma = 90^\circ - \delta$. Da blir

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos(2\delta) + 2\sin\delta = 1 - 2\sin^2\delta + 2\sin\delta < 1 + 2\delta,$$

der vi kan velge δ så liten vi vil.

b. Funksjonalligningen er

$$f(f(x) + y) = f(y) + x$$

Legg til z på begge sider, anvend f på begge sider, og bruk så funksjonalligningen på begge sider:

$$f(f(f(x) + y) + z) = f(f(y) + x + z),$$

$$f(z) + f(x) + y = f(x + z) + y,$$

som forkortes til Cauchys funksjonalligning

$$f(x + z) = f(x) + f(z).$$

Spesielt er $f(x + z) > f(x)$ (siden $f(z) > 0$), så f er en (strengt) voksende funksjon. Nå kan vi også forenkle den opprinnelige funksjonalligningen til $f(f(x)) + f(y) = f(y) + x$, forkortet $f(f(x)) = x$. Nå ser vi at $f(x) = x$, for vi har $f(x) > x \iff f(f(x)) > f(x) \iff x > f(x)$ fordi er voksende, så hverken $f(x) > x$ eller $f(x) < x$ er mulig.