Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Første runde 2023–2024

9. november 2023 (bokmål)

Ikke bla om før du får beskjed om det!

Abelkonkurransens første runde består av 20 flervalgsoppgaver som skal løses i løpet av 100 minutter. Bare ett av de fem svaralternativene er riktig. Svarene skrives i skjemaet nede til venstre.

Du får 5 poeng for riktig svar, 1 poeng for blankt svar og 0 poeng for galt svar. Det gir en poengsum mellom 0 og 100. Blank besvarelse gir 20 poeng.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir og skriveredskaper (inklusive passer og linjal, men ikke gradskive) er tillatt.

Når du får beskjed, kan du bla om og begynne på oppgavene.

Fyll ut med blokkbokstaver

Navn	Fødselsdato
Epost	Kjønn K ☐ M ☐
Skole	Klasse
☐ Sett kryss om du godtar at vi setter navnet ditt på resultatlisten. (Gjelder kun de beste resultatene, ca. topp 33%.)	

Svar

1		11	
2		12	
3		13	
4		14	
5		15	
6		16	
7		17	
8		18	
9		19	
10		20	

For læreren

Riktige: ☐ $\cdot 5 =$ ☐

Ubesvarte: $+$ ☐

Poengsum: $=$ ☐

Oppgave 1

Hva er det minste positive heltallet med eksakt seks (positive) divisorer, inkludert 1 og tallet selv? For eksempel har 75 seks divisorer: 1, 3, 5, 15, 25 og 75.

A 6 **B** 12 **C** 18 **D** 24 **E** 32

Oppgave 2

Peter prøver å finne reelle tall x og y slik at $x^2 + y^2 = 5$ og $xy = 1$. Hva kan sies med sikkerhet om slike tall?

A $x < y$ **B** $x = y$ **C** $x > y$
D Hverken utsagn **A**, **B** eller **C** er sikkert.
E Det finnes ingen slike reelle tall x, y.

Oppgave 3

Nils har en eske med fem sjokolader med forskjellige smaker: appelsin, banan, chili, drue og eple. Chili høres litt vondt ut, så han vil gjerne få den overstått og spise den som en av de to første sjokoladene, og appelsin høres godt ut, så han vil gjerne spise den som en av de to siste. Hvor mange rekkefølger kan han spise de fem sjokoladene i, slik at disse betingelsene er oppfylt?

A 4 **B** 8 **C** 18 **D** 24 **E** 30

Oppgave 4

Henrik lager fem likebente trekanter, alle med to sider av lengde 1. Vinkelen mellom de to like sidene er som gitt nedenfor. Hvilken trekant har størst areal?

A 30° **B** 60° **C** 75° **D** 100° **E** 105°

Oppgave 5

Nils har fire identiske skopar liggende i skapet. Han skal ut på reise, og vil ta med seg to par sko. Han tar ut fire tilfeldige sko. De to første av dem er høyresko. Hva er sannsynligheten for at de to neste skoene er venstresko, slik at de fire skoene danner to par?

A $\frac{2}{5}$ **B** $\frac{3}{14}$ **C** $\frac{1}{4}$ **D** $\frac{4}{9}$ **E** $\frac{3}{16}$

Oppgave 6

Et positivt heltall k er slik at siste siffer i k^8 er 6. Hva er siste siffer i k^4?

A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** Ikke entydig bestemt.

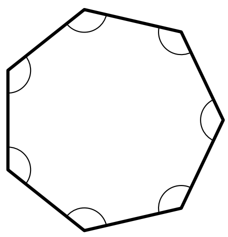
Oppgave 7

Helene studerer språk. Hun har lånt ti ulike bøker på biblioteket. Fem av dem er på polsk, og fem på ukrainsk. For variasjonens skyld ønsker hun å unngå å lese to bøker på samme språk etter hverandre. Hvor mange rekkefølger kan hun lese alle bøkene på?

A 240 **B** 3125 **C** 10395 **D** 28800 **E** 1814400

Oppgave 8

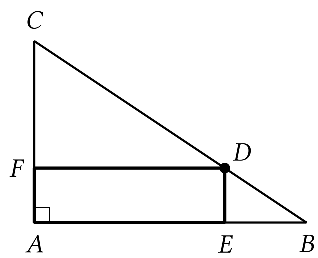
Alle sidene i en regulær mangekant er like lange, og alle vinklene mellom nabosider er like store. (Figuren viser en regulær sjukant.) Hvilken av disse kan være en vinkel i en regulær mangekant?



A 81° **B** 100° **C** 121° **D** 144° **E** 169°

Oppgave 9

Trekanten ABC er rettvinklet med sidelengder $AB = 6$ og $AC = 4$. Nils vil plassere et punkt D på hypotenusen BC og tegne opp rektangelet $DFAE$ med hjørnene E og F på katetene til trekanten som vist i figuren. Hvis han plasserer D på hypotenusen slik at rektangelet $DFAE$ utgjør halvparten av arealet til trekanten ABC, hvor lang må CD være?



A 2 **B** 3 **C** $\sqrt{13}$ **D** $2\sqrt{2}$ **E** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

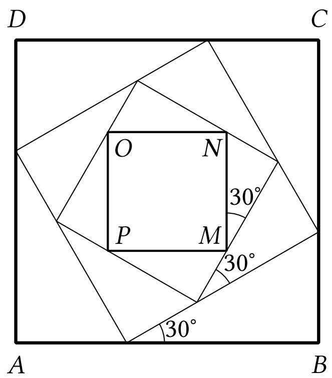
Oppgave 10

På Geminiskolen går det i alt 160 elever, fordelt på 80 tvillingpar. En uke hadde skolen aktivitetsdag tre dager på rad. Hver av dagene kunne hver elev velge mellom å dra på tur eller å spille fotball, men tvillinger måtte alltid velge forskjellig. Nøyaktig 20 av elevene spilte fotball alle de tre dagene. Hvor mange elever spilte fotball nøyaktig to av de tre dagene?

A 10 **B** 20 **C** 30 **D** 40 **E** 60

Oppgave 11

Kvadratet *ABCD* har sidelengde 1, og inneholder tre kvadrater inni hverandre. Hvert kvadrat er rotert 30° i forhold til kvadratet utenfor, og har hjørner på sidene til kvadratet utenfor. Hva er sidelengden til det innerste kvadratet *MNOP*?



A $\frac{2}{5}$ **B** $6\sqrt{3}-10$ **C** $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$
D $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **E** $8\sqrt{2}-11$

Oppgave 12

Lisa skriver ned tallet 1 på et ark. Hun kan velge å ikke gjøre noe mer, eller hun kan velge å enten gange tallet med 4 eller å legge til 5 før hun stryker over tallet på arket og skriver ned det nye tallet i stedet. Dette kan hun gjenta så lenge hun vil, men hun stopper alltid før tallet blir større enn 100. Hvor mange ulike tall (inkludert 1) kan hun ende opp med?

A 40 **B** 41 **C** 42 **D** 43 **E** 44

Oppgave 13

Hvilket tall som har samme verdi som

$$\sqrt{\frac{\pi+\sqrt{\pi^2-\pi}}{2}}+\sqrt{\frac{\pi-\sqrt{\pi^2-\pi}}{2}}?$$

A π **B** $\sqrt{\pi}$ **C** $\sqrt{\pi^2-\pi}$ **D** $\pi-\sqrt{\pi}$ **E** $\sqrt{\pi+\sqrt{\pi}}$

Oppgave 14

Firkanten $ABCD$ har rette vinkler i hjørnene B og C, og sidekanter $AB = 72$, $BC = 81$ og $CD = 90$. Diagonalene skjærer hverandre i E. Hvor stort er arealet til trekanten BCE?

A 405 **B** 810 **C** 1215 **D** 1620 **E** 1780

Oppgave 15

Hvilket tall er størst?

A $\sqrt{4} - \sqrt{3}$ **B** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ **C** $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ **D** $\sqrt[3]{2} - 1$ **E** $\sqrt[4]{2} - 1$

Oppgave 16

Regn ut

$$\frac{(0! + 1!) \cdot (1! + 2!) \cdot (2! + 3!) \cdot \cdots \cdot (2023! + 2024!)}{0! \cdot 1! \cdot 2! \cdot \cdots \cdot 2023!}$$

(Her er $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$, og $0! = 1! = 1$.)

A $2023!$ **B** $2023! \cdot 2023$ **C** $2024!$ **D** $2025!$
E Ingen av disse.

Oppgave 17

Følgen a_n er definert ved $a_1 = 23$ og $a_n = 5a_{n-1} + 7$ for $n = 2, 3, \ldots$. Hva er nest siste siffer i a_{2023}?

A 1 **B** 2 **C** 4 **D** 6 **E** 9

Oppgave 18

I den regulære tikanten $ABCDEFGHIJ$ med sidelengde 1 er O sentrum, og B' er speilingen av B over linjestykket AC. Da er avstanden fra O til B' lik

A 1 **B** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C** $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ **D** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **E** Ingen av disse.

Oppgave 19

Arne, Berit og Camilla ønsker å reservere et øvingsrom i morgen (mellom midnatt og neste midnatt). Det er bare mulig å reservere rommet i et helt antall timer, med start på hel time. Arne ønsker å reservere rommet for tre timer i strekk. Berit ønsker det fire timer i strekk, og Camilla ønsker det sju timer i strekk. De velger alle starttiden tilfeldig, med like stor sannsynlighet for hvert mulig valg. For eksempel kan Arne velge starttid 00, 01, 02, ..., 21, men ikke 22 eller 23, siden han må være ferdig før midnatt.

Eksempel: Arne 14–17, Berit 9–13, Camilla 17–24 er OK.
Eksempel: Arne 15–18, Berit 9–13, Camilla 17–24 gir overlapp A/C.

Hva er sannsynligheten for at ingen av reservasjonene overlapper?

A $\frac{1}{6}$ **B** $\frac{3}{16}$ **C** $\frac{5}{27}$ **D** $\frac{13}{63}$ **E** $\frac{25}{133}$

Oppgave 20

Jon skriver ned to heltall u og v på et ark. Så setter han $a_0 = 0$, og regner ut $a_n = ua_{n-1} + v$ for $n = 1, 2, 3, \ldots, 2023$. Til slutt ender han med $a_{2023} = 2023$. Hvor mange mulige par (u, v) kunne Jon ha startet med?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** Uendelig mange.