Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Første runde 2023–2024

9. november 2023 (nynorsk)

Ikkje bla om før du får beskjed om det!

I den første runden av Abelkonkurransen er det 20 fleirvalsoppgåver som skal løysast på 100 minutt. Berre eitt av dei fem svaralternativa er rett. Skriv svara i skjemaet nede til venstre.

Du får 5 poeng for rett svar, 1 poeng for blankt svar og 0 poeng for gale svar. Det gir ein poengsum mellom 0 og 100. Dersom alle svara er blanke, får du 20 poeng.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir og skrivereiskapar (inklusive passar og linjal, men ikkje gradskive) er tillatne.

Når du får beskjed, kan du bla om og ta til med oppgåvene.

Fyll ut med blokkbokstavar

Namn	Fødselsdato
Epost	Kjønn K ☐ M ☐
Skule	Klasse
☐ Set kryss om du tillét at vi set namnet ditt på resultatlista. (Gjeld berre dei beste resultata, ca. topp 33%.)	

Svar

1		11	
2		12	
3		13	
4		14	
5		15	
6		16	
7		17	
8		18	
9		19	
10		20	

For læraren

Rette:	☐ $\cdot 5 =$	☐
Blanke:	$+$	☐
Poengsum:	$=$	☐

Oppgåve 1

Kva er det minste positive heiltalet med eksakt seks (positive) divisorar, inkludert 1 og talet sjølv? Til dømes har 75 seks divisorar: 1, 3, 5, 15, 25 og 75.

A 6 **B** 12 **C** 18 **D** 24 **E** 32

Oppgåve 2

Peter prøver å finna reelle tal x og y slik at $x^2 + y^2 = 5$ og $xy = 1$. Kva kan bli sagt med sikkerheit om slike tal?

A $x < y$ **B** $x = y$ **C** $x > y$
D Korkje utsegn **A**, **B** eller **C** er sikkert.
E Det finst ingen slike reelle tal x, y.

Oppgåve 3

Nils har ei eske med fem sjokoladar med forskjellige smakar: appelsin, banan, chili, drue og eple. Chili høyrest litt vondt ut, så han vil gjerne få den overstått og eta han som ein av de to første sjokoladane, og appelsin høyrest godt ut, så han vil gjerne eta han som ein av dei to siste. Kor mange rekkefølger kan han eta dei fem sjokoladane i, slik at desse vilkåra er oppfylte?

A 4 **B** 8 **C** 18 **D** 24 **E** 30

Oppgåve 4

Henrik lagar fem likebeinte trekantar, alle med to sider av lengd 1. Vinkelen mellom dei to like sidene er som gitt nedanfor. Kva for ein trekant har størst areal?

A 30° **B** 60° **C** 75° **D** 100° **E** 105°

Oppgåve 5

Nils har fire identiske skopar liggande i skapet. Han skal ut på reise, og vil ta med seg to par sko. Han tar ut fire tilfeldige sko. Dei to første av dei er høgresko. Kva er sannsynet for at dei to neste skoa er venstresko, slik at dei fire skoa dannar to par?

A $\frac{2}{5}$ **B** $\frac{3}{14}$ **C** $\frac{1}{4}$ **D** $\frac{4}{9}$ **E** $\frac{3}{16}$

Oppgåve 6

Eit positivt heiltal k er slik at siste siffer i k^8 er 6. Kva er siste siffer i k^4?

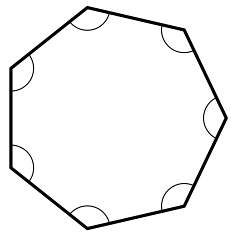
A 2 **B** 4 **C** 6 **D** 8 **E** Ikkje eintydig bestemt.

Oppgåve 7

Helene studerer språk. Ho har lånt ti ulike bøker på biblioteket. Fem av dei er på polsk, og fem på ukrainsk. For variasjonens skyld ønsker ho å unngå å lese to bøker på same språk etter kvarandre. Kor mange rekkefølger kan ho lese alle bøkene på?

A 240 **B** 3125 **C** 10395 **D** 28800 **E** 1814400

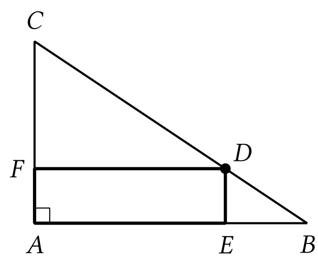
Oppgåve 8



Alle sidene i ein regulær mangekant er like lange, og alle vinklane mellom nabosider er like store. (Figuren viser ein regulær sjukant.) Kva for ein av desse kan vere ein vinkel i ein regulær mangekant?

A 81° **B** 100° **C** 121° **D** 144° **E** 169°

Oppgåve 9



Trekanten ABC er rettvinkla med sidelengder $AB = 6$ og $AC = 4$. Nils vil plassere eit punkt D på hypotenusen BC og tekne opp rektangelet $DFAE$ med hjørna E og F på katetane til trekanten som vist i figuren. Hvis han plasserer D på hypotenusen slik at rektangelet $DFAE$ utgjer halvparten av arealet til trekanten ABC, kor lang må CD vera?

A 2 **B** 3 **C** $\sqrt{13}$ **D** $2\sqrt{2}$ **E** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

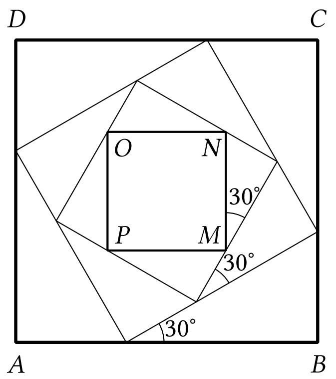
Oppgåve 10

På Geminiskulen går det i alt 160 elevar, fordelt på 80 tvillingpar. Ei veke hadde skulen aktivitetsdag tre dagar på rad. Kvar av dagane kunne kvar elev velje mellom å dra på tur eller å spele fotball, men tvillingar måtte alltid velje forskjellig. Nøyaktig 20 av elevane spelte fotball alle dei tre dagane. Kor mange elevar spelte fotball nøyaktig to av dei tre dagane?

A 10 **B** 20 **C** 30 **D** 40 **E** 60

Oppgåve 11

Kvadratet $ABCD$ har sidelengd 1, og inneheld tre kvadrat inni kvarandre. Kvart kvadrat er rotert 30° i forhold til kvadratet utanfor, og har hjørne på sidene til kvadratet utanfor. Kva er sidelengda til det inste kvadratet $MNOP$?



A $\dfrac{2}{5}$ **B** $6\sqrt{3}-10$ **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}$
D $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **E** $8\sqrt{2}-11$

Oppgåve 12

Lisa skriv ned talet 1 på eit ark. Ho kan velje å ikkje gjere noko meir, eller ho kan velje å enten gonge talet med 4 eller å legge til 5 før ho stryk over talet på arket og skriv ned det nye talet i staden. Dette kan ho gjenta så lenge ho vil, men ho stoggar alltid før talet blir større enn 100. Kor mange ulike tal (inkludert 1) kan ho ende opp med?

A 40 **B** 41 **C** 42 **D** 43 **E** 44

Oppgåve 13

Kva for eit tal har same verdi som

$$\sqrt{\frac{\pi+\sqrt{\pi^2-\pi}}{2}}+\sqrt{\frac{\pi-\sqrt{\pi^2-\pi}}{2}}\,?$$

A π **B** $\sqrt{\pi}$ **C** $\sqrt{\pi^2-\pi}$ **D** $\pi-\sqrt{\pi}$ **E** $\sqrt{\pi+\sqrt{\pi}}$

Oppgåve 14

Firkanten $ABCD$ har rette vinklar i hjørna B og C, og sidekantar $AB = 72$, $BC = 81$ og $CD = 90$. Diagonalane skjer kvarandre i E. Kor stort er arealet til trekanten BCE?

A 405 **B** 810 **C** 1215 **D** 1620 **E** 1780

Oppgåve 15

Kva for eit tal er størst?

A $\sqrt{4} - \sqrt{3}$ **B** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ **C** $\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}$ **D** $\sqrt[3]{2} - 1$ **E** $\sqrt[4]{2} - 1$

Oppgåve 16

Rekn ut

$$\frac{(0! + 1!) \cdot (1! + 2!) \cdot (2! + 3!) \cdot \cdots \cdot (2023! + 2024!)}{0! \cdot 1! \cdot 2! \cdot \cdots \cdot 2023!}$$

(Her er $n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n$, og $0! = 1! = 1$.)

A $2023!$ **B** $2023! \cdot 2023$ **C** $2024!$ **D** $2025!$
E Ingen av desse.

Oppgåve 17

Følga a_n er definert ved $a_1 = 23$ og $a_n = 5a_{n-1} + 7$ for $n = 2, 3, \ldots$. Kva er nest siste siffer i a_{2023}?

A 1 **B** 2 **C** 4 **D** 6 **E** 9

Oppgåve 18

I den regulære tikanten $ABCDEFGHIJ$ med sidelengd 1 er O sentrum, og B' er speilinga av B over linjestykket AC. Da er avstanden fra O til B' lik

A 1 **B** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **C** $\frac{1 + \sqrt{2}}{2}$ **D** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **E** Ingen av desse.

Oppgåve 19

Arne, Berit og Camilla ønsker å reservere eit øvingsrom i morgon (mellom midnatt og neste midnatt). Det er berre mogleg å reservere rommet i eit helt tal timar, med start på heil time. Arne ønsker å reservere rommet for tre timar i strekk. Berit ønsker det fire timar i strekk, og Camilla ønsker det sju timar i strekk. Dei vel alle starttida tilfeldig, med like stort sannsyn for kvart mogleg val. Til dømes kan Arne velje starttid 00, 01, 02, ..., 21, men ikkje 22 eller 23, sidan han må vere ferdig før midnatt.

Eksempel: Arne 14–17, Berit 9–13, Camilla 17–24 er OK.
Eksempel: Arne 15–18, Berit 9–13, Camilla 17–24 gir overlapp A/C.

Kva er sannsynet for at ingen av reservasjonane overlappar?

A $\frac{1}{6}$ **B** $\frac{3}{16}$ **C** $\frac{5}{27}$ **D** $\frac{13}{63}$ **E** $\frac{25}{133}$

Oppgåve 20

Jon skriv ned to heiltal u og v på eit ark. Så set han $a_0 = 0$, og reknar ut $a_n = ua_{n-1} + v$ for $n = 1, 2, 3, \ldots, 2023$. Til slutt ender han med $a_{2023} = 2023$. Kor mange moglege par (u, v) kunne Jon ha starta med?

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** 4 **E** Uendeleg mange.