Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Første runde 2023-2024 – *Løsninger*

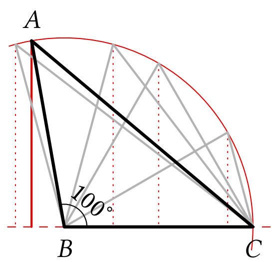
9. november 2023

Oppgave 1. Oppgaven løses raskt ved bare å telle divisorer i svaralternativene, men med litt mer teori kan det løses slik: Ethvert heltall $n > 1$ kan faktoriseres entydig som $p_1^{m_1} \cdots P_k^{m_k}$, der $p_1 < \cdots < p_k$ er primtall og hver m_i er et positivt heltall. Divisorene til dette tallet har formen $p_1^{n_1} \cdots P_k^{n_k}$ der $0 \le n_i \le m_i$ for hver i. Det gir i alt $(m_1 + 1) \cdots (m_k + 1)$ muligheter, og altså så mange divisorer. Et heltall med eksakt 6 divisorer må derfor enten ha formen p_1^5 for et primtall p_1, eller $p_1^2 p_2$ for distinkte primtall p_1, p_2. Minste kandidat av den første typen er åpenbart $2^5 = 32$, mens minste kandidat av den andre typen er $2^2 \cdot 3 = 12$. . . . . **B**

Oppgave 2. Forutsetningene i oppgaven endres ikke dersom vi bytter om x og y, så hverken **A** eller **C** kan være rett. Det kan heller ikke **B**, for da måtte $2x^2 = 5$ og $x^2 = 1$. Valget står nå mellom de to siste alternativene. Setter vi inn $y = 1/x$ i $x^2 + y^2 = 5$ og rydder litt, får vi $x^4 - 5x^2 + 1 = 0$. Det gir $x^2 = \frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{21})$, som gir mulige positive løsninger for x^2 og dermed for x. (Hvis $x^2 = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21})$, blir $y^2 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{21})$, og omvendt.) En mer geometrisk løsning benytter at punktet (x, y) skal ligge i et skjæringspunkt mellom sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ og hyperbelen $xy = 1$. . . . . **D**

Oppgave 3. Nils kan velge chili som nummer 1 eller 2, altså to muligheter. Han kan velge appelsin som nummer 4 eller 5, også det to muligheter. Da gjenstår det tre sjokolader, og når han har bestemt den innbyrdes rekkefølgen på de tre ($3! = 6$ muligheter), er alt bestemt. I alt blir det $2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$ mulige rekkefølger, siden de tre valgene kan gjøres uavhengig av hverandre. . . . . **D**

Oppgave 4. Sett navn på hjørnene som vist i figuren, med $AB = BC = 1$. Høyden fra A til grunnlinjen BC er $\sin b$, der b er vinkelen i B. (Den skal ganges med lengden av BC, som er lik 1.) Sinusfunksjonen vokser fra 0° til 90° og avtar deretter frem til 180° (og forbi), og den er symmetrisk om 90°: $\sin(90° - x) = \sin(90° + x)$. Størst høyde, og dermed størst areal, får vi når b er nærmest 90°. Vi kan også se dette geometrisk: Punktet A ligger i alle fall på sirkelen med radius 1 og sentrum i B, og det er knapt overraskende at høyden blir større jo nærmere $\angle ABC$ er til en rett vinkel. . . . . **D**

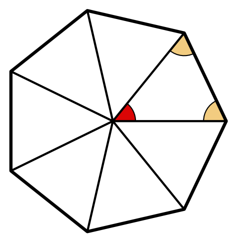


Oppgave 5. Etter at Nils tok ut to høyresko, er det igjen seks sko i skapet, hvorav fire venstresko. Sannsynligheten for at den neste skoen han tar, er en venstresko, er altså $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Gitt at det går bra, er det nå tre venstresko blant de siste fem skoene, så sannsynligheten for at han får en venstresko til, er $\frac{3}{5}$. Sannsynligheten for at han trekker to venstresko, og dermed ender opp med to par, er $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. . . . . **A**

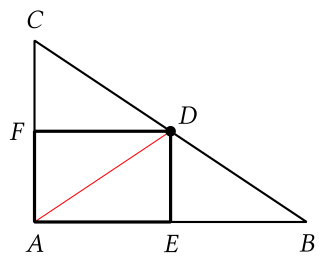
Oppgave 6. Siste siffer i produktet av to tall er entydig gitt ved siste siffer i hvert av de to tallene. Siden k^8 er et partall som ikke er delelig på 5, gjelder det samme for k, så siste siffer i k er en av 2, 4, 6 eller 8. Kvadrerer vi de fire tallene, ser vi at siste siffer i k^2 er 4 eller 6. Kvadrerer vi enda en gang, ser vi at siste siffer i k^4 er 6. . . . . **C**

Oppgave 7. Helene må veksle mellom polsk og ukrainsk, så hun har bare to måter å fordele språk på: Den ene starter med polsk, og den andre starter med ukrainsk. For hvert av de to valgene kan hun velge rekkefølgen på de polske bøkene på $5! = 120$ ganger, og likeledes har hun 120 rekkefølger for bøkene på ukrainsk. Det gir i alt $2 \cdot 120 \cdot 120 = 28800$ mulige rekkefølger. **D**

Oppgave 8. Del inn mangekanten (med n hjørner) i trekanter ved å trekke et linjestykke fra sentrum til hvert hjørne. Vinkelen i sentrumshjørnet av trekanten er $360°/n$. Siden vinkelsummen i en trekant er $180°$, er summen av de to andre vinklene i trekanten lik $180° - 360°/n = \frac{n-2}{n} \cdot 180°$. Den summen er også lik vinkelen mellom nabosider i n-kanten. Nå setter vi inn $n = 3$, 4, og så videre, med resultat $60°$, $90°$, $108°$, $120°$, $\frac{900}{7}°$, $135°$, $140°$, $144°$, og der stopper vi, siden vi fant en mulighet. Generelt, for å se om $g°$ er en mulig vinkel, kan vi løse ligningen $180 - 360/n = g$ og få $n = 360/(180 - g)$. For eksempel er $360/(180 - 169) = 360/11$ ikke et heltall, så ingen regulær mangekant har vinkel $169°$. . . . . **D**



Oppgave 9. Trekantene ABC, EBD og FDC er alle likeformede, siden de har felles vinkler. Dersom lengdeforholdet $CD : CB$ er x, har trekantene EBD og FDC areal henholdsvis x^2 og $(1-x)^2$ ganger arealet av ABC. Rektanglet $DFAE$ utgjør halvparten av arealet til ABC presis når de to småtrekantene tilsammen utgjør halvparten, det vil si når $x^2 + (1-x)^2 = \frac{1}{2}$. Rydder vi i denne ligningen får vi $2x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0$, det vil si $2(x - \frac{1}{2})^2 = 0$, så $x = \frac{1}{2}$. Pytagoras på trekanten ABC gir $CB = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$, slik at $CD = \frac{1}{2}CB = \sqrt{13}$. . . . . **C**



Oppgave 10. Tvillingene til de 20 som spilte fotball alle dagene, må ha gått tur alle dagene. Tar vi bort disse tvillingparene, står vi igjen med 120 elever (60 tvillingpar) som valgte en aktivitet en av dagene, og den andre aktiviteten de to andre dagene. Det betyr at nøyaktig en tvilling i hvert av de 60 tvillingparene spilte fotball nøyaktig to av dagene. . . . . **E**

Oppgave 11. Når vi tar bort det nest største kvadratet fra det største, står vi igjen med fire 30-60-90-trekanter. Vi kaller lengden av hypotenusen i disse x. Katetene har da lengde $\frac{1}{2}x$ og $\frac{1}{2}\sqrt{3}x$. Vi må ha $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{3}x = 1$ (sidekanten i det største kvadratet), så $x = 2/(1+\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$. Forholdet mellom sidelengdene til to kvadrater etter hverandre er altså $\sqrt{3}-1$, så sidelengden til det innerste kvadratet er $(\sqrt{3}-1)^3 = (\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})^2 + 3\sqrt{3} - 1 = 6\sqrt{3} - 10$. **B**

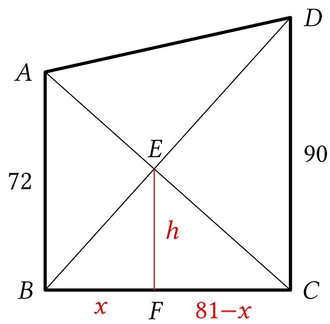
Oppgave 12. Lisa kan lett lage tallene 1, 4, 6 og 9. Ved å legge til 5 et jevnt antall ganger, kan hun dermed lage alle tall som ender på ett av de fire sifrene. Men det er de eneste tallene hun kan få til, for om hun ganger et slikt tall med 4 eller legger til 5, får hun alltid et nytt tall som ender på et av disse sifrene. Det er i alt $4 \cdot 10 = 40$ positive tall mindre enn 100 som ender på ett av de fire sifrene. . . . . **A**

Oppgave 13. Vi kvadrerer det gitte uttrykket og får

$$\frac{\pi+\sqrt{\pi^2-\pi}}{2} + \frac{\pi-\sqrt{\pi^2-\pi}}{2} + 2\sqrt{\frac{\pi+\sqrt{\pi^2-\pi}}{2}\cdot\frac{\pi-\sqrt{\pi^2-\pi}}{2}}$$
$$= \pi + \sqrt{\pi^2-(\pi^2-\pi)} = \pi + \sqrt{\pi}.$$

. . . . **E**

Oppgave 14. La F være fotpunktet til normalen fra E på BC. Fra de likeformede trekantene BFE og BCD får vi $x/h = \frac{81}{90} = \frac{9}{10}$, og de likeformede trekantene CFE og CBA gir oss $(81-x)/h = \frac{81}{72} = \frac{9}{8}$. Skriv om den første ligningen til $x = \frac{9}{10}h$ og den andre til $x = 81 - \frac{9}{8}h$, og kombiner de to. Det gir $81 = (\frac{9}{8} + \frac{9}{10})h = \frac{81}{40}h$, så $h = 40$, og trekanten BCE har areal $\frac{1}{2}\cdot 81 \cdot 40 = 1620$. . . . . **D**



Oppgave 15. Det letteste først: D > E, for eksempel fordi $(\sqrt[3]{2})^{12} = 2^4 = 16$ mens $(\sqrt[4]{2})^{12} = 2^3 = 8 < 16$. For å sammenligne uttrykkene **A**–**D** regner vi ut de inverse slik: For **A** bruker vi $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ med $x = \sqrt{4}$ og $y = \sqrt{3}$, og får $1/\mathrm{A} = \sqrt{4}+\sqrt{3}$, mens samme metode med $x = \sqrt{3}$ og $y = \sqrt{2}$ gir $1/\mathrm{B} = \sqrt{3}+\sqrt{2} < 1/\mathrm{A}$. For **C** bruker vi $(x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3$ med $x = \sqrt[3]{3}$ og $y = \sqrt[3]{2}$, så $1/\mathrm{C} = 3^{2/3} + 3^{1/3}\cdot 2^{1/3} + 2^{2/3}$. Tilsvarende er $1/\mathrm{D} = 2^{2/3} + 2^{1/3} + 1 < 1/\mathrm{C}$, så D > C. Det gjenstår å sammenligne **B** og **D**. Men fordi $2^{2/3} > 2^{1/2} = \sqrt{2}$ og $2^{1/3} + 1 > 2 > \sqrt{3}$, er $1/\mathrm{D} > 1/\mathrm{B}$, så B > D. **B**

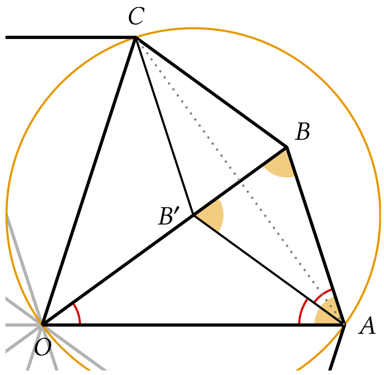
Oppgave 16. Det gitte uttrykket kan skrives som et produkt av 2024 faktorer, der hver er en brøk $(n! + (n+1)!)/n!$ med $n = 0, 1, \ldots, 2023$. Men $(n+1)! = n!(n+1)$, så brøken forenkles til $n+2$. Vi står altså igjen med $2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 2025 = 2025!$. . . . . **D**

Oppgave 17. Vi setter $a_n = b_n - \frac{7}{4}$ (fordi $a_n = a_{n-1}$ presis når $a_{n-1} = -\frac{7}{4}$). Det gir $b_n - \frac{7}{4} = 5(b_{n-1} - \frac{7}{4}) + 7$, som forenkles til $b_n = 5b_{n-1}$. Dermed er $b_{2023} = 5^{2022} b_1 = 5^{2022} \cdot \frac{99}{4}$ og $a_{2023} = b_{2023} - \frac{7}{4} = 5^{2022} \cdot \frac{99}{4} - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}(5^{2022} \cdot 99 - 7)$. Setter vi inn $99 = 100 - 1 = 5^2 \cdot 4 - 1$, får vi $a_{2023} = 5^{2024} - \frac{1}{4}(5^{2022} + 7)$. Når vi skal finne de siste k sifrene av et produkt, er det nok å regne med de siste k sifrene av hver faktor. Så vi kan finne de siste fire sifrene av potenser av 5: De blir 5, 25, 125, 625, 3125, 5625, 8125, 0625, og dermed gjentas de siste fire i følgen i det uendelige. Det vil si at de siste fire sifrene av 5^{4i} er 0625 for alle positive heltall k. Spesielt gjelder det 5^{2024}, mens de siste fire sifrene i 5^{2022} blir 5625. Så $5^{2022} + 7$ ender på 5632, og de siste to sifrene i $\frac{1}{4}(5^{2022} + 7)$ blir 08 (fordi $5632/4 = 1408$). Så $5^{2024} - \frac{1}{4}(5^{2022} + 7)$ ender på $25 - 8 = 17$, og det nest siste sifret er altså 1.

Alternativ løsning for de som kjenner til moduloregning: Først regner vi modulo 5, og ser at $a_n \equiv 2 \pmod{5}$ for $n \geq 2$. Det gir $a_n = 5x_n + 2$ for heltall n, slik at $5x_n + 2 = 5(5x_{n-1} + 2) + 7$ for $n > 2$, altså $x_n = 5x_{n-1} + 3$, og dermed $a_n = 5(5x_{n-1} + 3) + 2$, som gir $a_n \equiv 17 \pmod{25}$.

Deretter regner vi modulo 4, og finner $a_n \equiv a_{n-1} - 1 \pmod{4}$. Dermed $a_{2023} \equiv a_1 - 2022 \equiv 3 - 2 = 1 \pmod{4}$. Siden $a_{2023} \equiv 17 \pmod{25}$, og 25 og 4 er innbyrdes primiske, og $25 \cdot 4 = 100$, må $a_{2023} \equiv 17 \pmod{100}$. (Dette følger av det kinesiske restleddteoremet.) Det vil si at a_{2023} ender på 17 når vi skriver det i titallsystemet.

Alternativ løsning: Vi trenger bare holde styr på de to siste sifrene i a_n. For $n = 1, 2, \ldots$finner vi at disse er 23, 22, 17, 92, 64, 17, ..., og de siste fire her vil så gjentas i det uendelige. Det betyr at de to siste sifrene i a_{4k+3} er 17 for alle positive heltall k. Med $k = 505$ får vi så at a_{2023} ender på 17. . . . . **A**



Oppgave 18. Vi har $\angle AOB = 360^\circ/10 = 36^\circ$. Og siden trekanten AOB er likebent, med $OA = OB$, er $\angle OAB = \angle OBA = 72^\circ$ (husk at vinkelsummen i en trekant er 180°). Fordi A og C ligger symmetrisk om OB, er det rett vinkel mellom AC og OB, så B' ligger på linjestykket OB, og $\angle AB'B = \angle ABB' = 72^\circ$. Men da er $\angle BAB' = 36^\circ$ (vinkelsum nok en gang), og dermed $\angle OAB' = \angle OAB - \angle BAB' = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ$. Det følger at trekantene $AB'O$ og BAB' begge er likebente, så $OB' = AB' = AB = 1$.

Alternativ løsning: Etter å ha funnet (som i den første løsningen) at $\angle AOC = 72^\circ$ og $\angle AB'C = 144^\circ = 2 \cdot \angle AOC$, bruker vi sentralvinkelsetningen (egentlig omvendingen av setningen om at en sentralvinkel er dobbelt så stor som en tilhørende periferivinkel) for å se at B' er sentrum i den omskrevne sirkelen til trekanten OAC, så $OB' = AB' = AB = 1$. (Likheten $AB' = AB$ er en umiddelbar konsekvens av speilingen.) . . . . **A**

Oppgave 19. Arne kan velge ett av $25 - 3 = 22$ mulige tidsintervall, med start fra kl 00, 01, ..., 21. Tilsvarende har Berit $25 - 4 = 21$ mulige valg, mens Camilla har $25 - 7 = 18$ mulige valg. Det totale antallet mulige utfall er $22 \cdot 21 \cdot 18$.

Vi må telle opp antall utfall som ikke leder til kollisjoner. Et eksempel viser hvordan vi kan representere et slikt utfall: Se på strengen ∗∗B∗∗∗∗AC∗∗∗∗. Den tolker vi slik: Fra midnatt er det to ledige timer (∗∗), så kommer Berits fire timer, så fire ledige timer (∗∗∗∗), så Arne og Camilla rett etter hverandre ($3 + 7 = 10$ timer), og til sist er det fire ledige timer til før midnatt. Enhver streng med ti stjerner pluss de tre symbolene A, B og C én gang hver gir en løsning. Det er i alt $13 \cdot 12 \cdot 11$ måter å plassere de tre bokstavene på blant de 13 symbolene i en slik streng.

Den søkte sannsynligheten blir $\frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{22 \cdot 21 \cdot 18} = \frac{13}{63}$. (Livet blir mye vanskeligere om du ganger ut teller og nevner før du prøver å forenkle brøken.) . . . . **D**

Oppgave 20. En banal mulighet er $u = 0$: Da blir $a_n = v$ for alle n, så $v = 2023$ er eneste mulighet.

En annen mulighet er $u = 1$: Da blir $a_n = nv$, så $v = 1$ er eneste mulighet som gir $a_{2023} = 2023$.

Om vi setter $a_n = u^n b_n$, trenger ikke b_n være heltall, men vi får $b_{n+1} = b_n + v/u^{n+1}$, og dermed $b_n = v(1/u^n + 1/u^{n-1} + \cdots + 1/u^2) + b_1$. Merk at $b_1 = v/u$, så det siste leddet føyer seg pent inn i rekken. Dermed har vi $a_n = v(1 + u^2 + \cdots + u^{n-1}) = v(u^n - 1)/(u - 1)$. Setter vi inn for $n = 2023$ skal vi altså ha $2023(u - 1) = v(u^{2023} - 1)$.

Dette gir oss ingen informasjon for $u = 1$, men det tilfellet har vi alt drøftet. For $u = 0$ får vi $v = 2023$, som vi også alt har sett. Vi kan prøve $u = -1$, som også passer med $v = 2023$. Men forsøker vi med andre heltall u, altså $|u| \geq 2$, er det klart at høyresiden blir alt for stor i forhold til venstresiden. Spesifikt, $|u^{2023} - 1|/|u - 1| \geq |u|^{2022}/|2u| > 2^{2020}$, eller tilsvarende estimater.

Alt i alt har vi altså bare løsningene $(0, 2023)$, $(1, 1)$ og $(-1, 2023)$. .... **C**