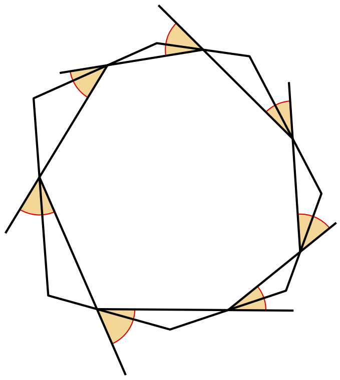
Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Andre runde 2023–2024 – *Løsninger*

18. januar 2024

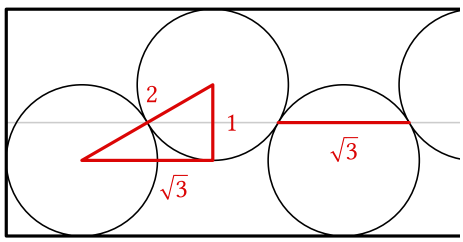
Oppgave 1. Skriv N og H for Nils og Henriks nåværende aldre. Vi har $N - 13 = \frac{1}{2}(H+2)$ og $H+1 = N-2$. Skriv den første ligningen som $2N - H = 28$ og sett inn $H = N - 3$ fra den andre, altså $2N - N + 3 = 28$, så $N = 25$, og derfor $H = 25 - 3 = 22$. $NH = 25 \cdot 22 = 550$. **550**

Oppgave 2. Forleng sidene i den indre sjukanten. Fordi toppvinkler er like store, kan vi flytte halvparten av de markerte vinklene som vist i figuren. Når du nå går rundt den indre sjukanten, svinger du til venstre i hvert hjørne med en vinkel lik den markerte. Ettersom du svinger til venstre i alt 360° på rundturen, er det også summen av vinklene. **360**



Oppgave 3. Hvis Per stjal ett egg x dager, to egg y dager og tre egg z dager, er $x+y+z = 365$ og $x+2y+3z = 700$. I tillegg skal x, y og z være heltall ≥ 0. Trekker vi de to ligningene fra hverandre, får vi $y + 2z = 335$. Med $z = 0$ får vi $y = 335$. Det går an, for det gir $x = 30 \geq 0$, og det gir åpenbart den største mulige verdi for y. Ligningen $y + 2z = 335$ impliserer at y er odde. Minste mulige verdi later til å være $y = 1$. Det gir $z = 167$ og $x = 365 - 167 - 1 \geq 0$, så det er også mulig. **334**

Oppgave 4. Siden den minste dimensjonen er lik diameteren av en klinkekule, handler det om å pakke inn sirkelskiver med radius 1 i et rektangel med dimensjoner 3×100. Det mest effektive må være å pakke dem som i figuren, med senteravstand $\sqrt{3}$ i lengderetningen.



Hvis du pakker inn $k+1$ klinkekuler, fyller de i alt $2 + k\sqrt{3}$ i lengderetningen av esken. Vi må finne det største tallet k slik at $2 + k\sqrt{3} \leq 100$, det vil si $3k^2 \leq 98^2 = 9604$, med andre ord $k^2 \leq 3201\frac{1}{3}$, Det er klart at $k = 50$ oppfyller ulikheten og $k = 60$ ikke gjør det. Litt prøving viser at $56^2 = 3136$ mens $57^2 = 3249$, så største mulige verdi er $k = 56$. Husk så at dette gir $k+1 = 57$ klinkekuler. **57**

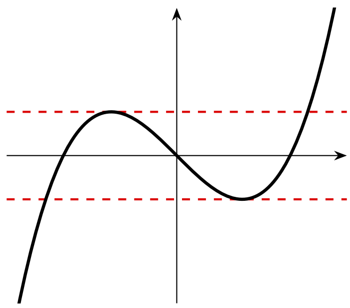
Skal vi være litt pedantiske, så har vi bare sannsynliggjort at vi ikke kan få inn mer enn 57 klinkelkuler, men vi har ikke *bevist* det. For å gjøre det, ser vi på senterlinjen i rektangelet. Enhver sirkelskive med radius 1 innenfor rektangelet dekker minst en lengde $\sqrt{3}$ av denne linjen (se det markerte linjestykket i den tredje sirkelskiven i figuren). Fordi $58\sqrt{3} > 100$, er det ikke plass til 58 sirkelskiver uten overlapp. (Ulikheten følger av $58^2 \cdot 3 = 10092 > 100^2$.)

Oppgave 5. Tallsifrene 1, 2, 3, 5 og 7 har alle forekommet minst tre ganger hver når Ellen har kommet til $n = 17$. 19 og 29 er primtall, og $38 = 2 \cdot 19$, så Ellen har tre niere etter $n = 38$. Videre er 41, 43 og 47 primtall, så Ellen har tre firere etter $n = 47$. Tre nuller er neste milepæl, siden 101, 103 og 107 alle er primtall. For seksere merker vi oss at 61 og 67 er primtall, og tre seksere er i boks etter $n = 2 \cdot 61 = 122$. Til sist er 83 og 89 primtall, men ingen andre på åttitallet – så Ellen må opp til $n = 2 \cdot 83 = 166$ for å få tre åttere. **166**

Oppgave 6. Nils må velge hvilke fem tall skal skrives på den røde siden av hvert kort. Det kan han gjøre på $\frac{10!}{5!\,5!} = 252$ måter. Da har han bare to valg for hva han skal gjøre med resten av tallene: De må skrives på den blå siden av hvert kort enten i samme rekkefølge som tallene på den røde siden, eller i omvendt rekkefølge. I alt $2 \cdot 252$ muligheter. **504**

Oppgave 7. Om n er et heltall og d en divisor til n, er også n/d en divisor til n. For at strengt mer enn halvparten av divisorene til n er ensifrede, er det derfor nødvendig at det finnes minst en divisor d slik at både d og n/d er ensifrede. Siden største ensifrede tall er 9, må derfor $n = d \cdot n/d \leq 9 \cdot 9 = 81$. Og $n = 81$ oppfyller kravet: Divisorene er 1, 3, 9, 27, 81. . . . . **81**

Oppgave 8. Gjennomsnittet er 500 før Nina har endret tallene. (En rask måte å se det på: Gjennomsnittet av 1 og 999 er 500, det gjelder også 2 og 998, og så videre opp til 499 og 501, og så er bare 500 igjen.) Vi må finne ut hvor mye gjennomsnittet avtar. Men det er enklere å finne ut hvor mye *summen* avtar, og så dele på 999 til slutt. Når Nina endrer det første sifferet i hvert av de 100 tallene 900, 901, …, 999 til 6, avtar verdien med 300 for hvert av dem, og summen med $100 \cdot 300 = 30000$. På samme måte, når hun endrer sifferet i tierposisjonen for hvert av de 100 tallene 90, 91, …, 99, 190, 191, …, 199, …, 990, 991, …, 999, avtar summen med $100 \cdot 30 = 3000$. Og når hun endrer sifferet i enerposisjonen for hvert av tallene 9, 19, …, 999, avtar summen med $100 \cdot 3 = 300$. I alt avtar summen med 33300, så gjennomsnittet avtar med $\frac{33300}{999} = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$ og ender opp med verdien $466\frac{2}{3}$. **467**



Oppgave 9. Vi definerer $Q(x) = x^3 + ax$, så er kravet i oppgaven at $Q(x) = 2 - b$ i eksakt to punkter, og at $Q(x) = -2 - b$ i eksakt to punkter. Dersom $a \geq 0$, er $Q(x)$ strengt voksende, så det er umulig. Derfor må $a < 0$, og grafen til $Q(x)$ blir omtrent som i figuren. Vi kan lese rett ut av figuren at det er bare to y-verdier (markert i rødt) som oppnås for nøyaktig to x-verdier hver. Fordi grafen til $Q(x)$ er symmetrisk om origo, er disse y-verdiene like store, bare med motsatt fortegn. Skal det være sant for $y = 2-b$ og $y = -2 - b$, må $b = 0$, altså $Q(x) = P(x)$.

Tredjegradspolynomet $P(x) - 2$, med to reelle røtter $x_1 \neq x_2$, kan divideres med $(x - x_1)(x - x_2)$ uten rest. Kvotienten blir et førstegradspolynom. Siden $P(x) - 2$ ikke har flere røtter, må kvotienten være enten $x - x_1$ eller $x - x_2$. Vi antar det første. (Hvis ikke, så bare bytt om x_1 og x_2.) Dermed er

$$P(x) = (x - x_1)^2(x - x_2) + 2 = x^3 - (2x_1 + x_2)x^2 + (x_1^2 + 2x_1x_2)x - x_1^2x_2 + 2.$$

Siden $P(x)$ ikke har noe 2.-gradsledd, må $x_2 = -2x_1$, så dette forenkles til

$$P(x) = x^3 - 3x_1^2x + 2x_1^3 + 2.$$

Men vi har sett at $P(x)$ ikke har noe konstantledd heller, så $2x_1^3 + 2 = 0$, og dermed er $x_1 = -1$. Altså er $P(x) = x^3 - 3x$, og det gir $P(8) = 8^3 - 3 \cdot 8 = 512 - 24 = 488$.

Et alternativ til første del av løsningen (symmetriargumentet som ledet til $b = 0$) er å utlede de to ligningene

$$P(x) = x^3 - 3x_1^2x + 2x_1^3 + 2, \qquad P(x) = x^3 - 3x_3^2x + 2x_3^3 - 2.$$

Den første av disse fant vi ovenfor, og den andre finner vi på samme måte ved å faktorisere $P(x) + 2$ (etter kanskje å ha byttet om x_3 og x_4). Når vi sammenligner koeffisienten til førstegradsleddet i de to uttrykkene, ser vi at $x_3^2 = x_1^2$, så $x_3 = -x_1$ ($x_3 = x_1$ er jo umulig fordi $P(x_3) \neq P(x_1)$). Deretter sammenligner vi konstantleddene, altså $2x_1^3 + 2 = 2x_3^3 - 2$, det vil si $2x_1^3 + 2 = -2x_1^3 - 2$. Men da må jo $2x_1^3 + 2 = 0$, altså $x_1 = -1$ som før. **488**

Oppgave 10. Skriv a for arealet av trekanten DEF. Trekk et ekstra linjestykke BD. Trekantene DEF og BED har samme høyde målt fra det felles toppunktet D, mens grunnlinjen BE er halvparten så lang som EF, så arealet av BED er $\frac{1}{2}a$. På samme måte (toppunkt B) har ABE areal $\frac{3}{2}$ ganger arealet til BED, altså lik $\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}a = \frac{3}{4}a$. Ut fra samme resonnement må trekantene BCF og CAD også ha areal $\frac{3}{4}a$. Trekanten ABC har derfor areal $a + \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}a + \frac{3}{4}a = \frac{13}{4}a$. Altså har vi $702 = \frac{13}{4}a$, og dermed $a = \frac{4 \cdot 702}{13} = 216$. **216**