

Niels Henrik Abels
matematikkonkurranse: Finale 2023–2024

5. mars 2024 (bokmål)



Abelkonkurransens finale består av fire oppgaver (åtte punkter) som skal løses i løpet av fire timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. **Begynn på nytt ark for hver av de fire oppgavene.**

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Maksimal poengsum er dermed 40.

Tillatte hjelpemidler er kladdepapir, tospråklige ordbøker og skriveredskaper inklusive passer og linjal, men ikke gradskive.

Oppgave 1

a. Bestem alle heltall $n \geq 2$ som er slik at $n \mid s_n - t_n$ der s_n er summen av alle heltallene i intervallet $[1, n]$ som er relativt primiske til n , og t_n er summen av de resterende heltallene i samme intervall.

b. Finn alle funksjoner $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ som er slik at tallene

$$n, f(n), f(f(n)), \dots, f^{m-1}(n)$$

er forskjellige modulo m for alle heltall n, m med $m > 1$.

(Her er f^k definert ved at $f^0(n) = n$ og $f^{k+1}(n) = f(f^k(n))$ for $k \geq 0$.)

Oppgave 2

a. Positive heltall $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ skal velges slik at $a_j - a_i$ ikke er et primtall for noen i, j med $0 \leq i < j \leq n$. For hver $n \geq 1$, bestem den minste mulige verdien av a_n .

b. Finn alle funksjoner $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ som oppfyller

$$xf(f(x) + y) = f(xy) + x^2$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.



Oppgave 3

- a. Bestem den minste konstanten N slik at det følgende kan være sant:

Geostan har utplassert hemmelige agenter i Kombostan. Alle par av agenter kan kommunisere, enten direkte eller gjennom andre agenter. *Avstanden* mellom to agenter er det minste antall agenter i en kommunikasjonskjede mellom de to agentene.

Andreas og Edvard er blant disse agentene, og Kombostan har gitt Noah i oppgave å finne avstanden mellom Andreas og Edvard. Noah har en liste med tall, ett for hver agent. Tallet til en agent beskriver den lengste av de to avstandene fra agenten til Andreas og Edvard. Noah vet derimot ikke hvilket tall som tilsvarende hvilken agent, eller hvilke agenter som har direkte kontakt.

Med denne informasjonen kan han skrive ned N tall og bevise at avstanden mellom Andreas og Edvard er ett av disse N tallene. Tallet N er uavhengig av kommunikasjonsnettverket til agentene.

- b. En *2024-tabell* er en tabell med to rader og 2024 kolonner som inneholder alle tallene $1, 2, \dots, 4048$. En slik tabell er *jevnt fargelagt* dersom nøyaktig halvparten av tallene i hver rad, og ett tall i hver kolonne, er farget røde. *Rødsummen* i en jevnt fargelagt 2024-tabell er summen av alle de rødfargede tallene i tabellen.

La N være det største tallet som er slik at enhver 2024-tabell har en jevn fargelegging med rødsum $\geq N$. Bestem N , og finn antall 2024-tabeller som er slik at enhver jevn fargelegging av tabellen har rødsum $\leq N$.

Oppgave 4

- a. I trekanten ABC med $AB < AC$ er AD en høyde i trekanten. Punktene E og A ligger på motsatte sider av BC , med E på omsirkelen til ABC . Videre er $AD = DE$ og $\angle ADO = \angle CDE$, der O er omsenteret til ABC . Bestem $\angle BAC$.

- b. Femkantene $P_1P_2P_3P_4P_5$ og $I_1I_2I_3I_4I_5$ er sykliske, der I_i er innsenteret til trekanten $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ (regnet syklisk, det vil si $P_0 = P_5$ og $P_6 = P_1$). Vis at linjene $P_1I_1, P_2I_2, P_3I_3, P_4I_4$ og P_5I_5 møtes i ett punkt.