# Niels Henrik Abels matematikkonkurranse: Finale 2023–2024

5. mars 2024 (nynorsk)

I finalen i Abelkonkurransen er det fire oppgåver (åtte punkt) som skal løysast på fire timar. Svara skal grunngivast og førast på eigne ark. **Begynn på nytt ark for kvar av dei fire oppgåvene.**

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Maksimal poengsum er såleis 40.

Tillatne hjelpemiddel er kladdepapir, tospråklege ordbøker og skrivereiskapar inklusive passar og linjal, men ikkje gradskive.

### Oppgåve 1

**a.** Bestem alle heiltal $n \geq 2$ som er slik at $n \mid s_n - t_n$ der $s_n$ er summen av alle heiltala i intervallet $[1, n]$ som er relativt primiske til $n$, og $t_n$ er summen av dei resterande heiltala i same intervall.

**b.** Finn alle funksjonar $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ som er slik at tala

$$n, f(n), f(f(n)), \dots, f^{m-1}(n)$$

er forskjellige modulo $m$ for alle heiltal $n$, $m$ med $m > 1$.

(Her er $f^k$ definert ved at $f^0(n) = n$ og $f^{k+1}(n) = f(f^k(n))$ for $k \geq 0$.)

### Oppgåve 2

**a.** Positive heiltal $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ skal bli valde slik at $a_j - a_i$ ikkje er eit primtal for nokre $i$, $j$ med $0 \leq i < j \leq n$. For kvar $n \geq 1$, bestem den minste moglege verdien av $a_n$.

**b.** Finn alle funksjonar $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som oppfyller

$$xf(f(x) + y) = f(xy) + x^2$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}$.

**Oppgåve 3**

**a.** Bestem den minste konstanten $N$ slik at det følgjande kan vere sant:

Geostan har utplassert hemmelege agentar i Kombostan. Alle par av agentar kan kommunisere, enten direkte eller gjennom andre agentar. *Avstanden* mellom to agentar er det minste talet agentar i ei kommunikasjonskjede mellom dei to agentane.

Andreas og Edvard er blant desse agentane, og Kombostan har gitt Noah i oppgåve å finne avstanden mellom Andreas og Edvard. Noah har ei liste med tal, eitt for kvar agent. Talet til ein agent beskriv den lengste av dei to avstandane frå agenten til Andreas og Edvard. Noah veit derimot ikkie kva tal som svarer til kva for agent, eller kva for agentar som har direkte kontakt.

Med denne informasjonen kan han skrive ned $N$ tal og bevise at avstanden mellom Andreas og Edvard er eitt av desse $N$ tala. Talet $N$ er uavhengig av kommunikasjonsnettverket til agentane.

**b.** Ein 2024-*tabell* er ein tabell med to rader og 2024 kolonnar som inneheld alle tala 1, 2, ..., 4048. Ein slik tabell er *jamt fargelagt* dersom nøyaktig halvparten av tala i kvar rad, og eitt tall i kvar kolonne, er farga raude. *Raudsummen* i ein jamt fargelagt 2024-tabell er summen av alle dei raudfarga tala i tabellen.

La $N$ vere det største talet som er slik at kvar ein 2024-tabell har ei jamn fargelegging med raudsum $\geq N$. Bestem $N$, og finn talet på 2024-tabellar som er slik at kvar ein jamn fargelegging av tabellen har raudsum $\leq N$.

**Oppgåve 4**

**a.** I trekanten $ABC$ med $AB < AC$ er $AD$ ei høgd i trekanten. Punkta $E$ og $A$ ligg på motsette sider av $BC$, med $E$ på omsirkelen til $ABC$. Vidare er $AD = DE$ og $\angle ADO = \angle CDE$, der $O$ er omsenteret til $ABC$. Bestem $\angle BAC$.

**b.** Femkantane $P_1P_2P_3P_4P_5$ og $I_1I_2I_3I_4I_5$ er sykliske, der $I_i$ er innsenteret til trekanten $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ (rekna syklisk, det vil seie $P_0 = P_5$ og $P_6 = P_1$). Vis at linjene $P_1I_1$, $P_2I_2$, $P_3I_3$, $P_4I_4$ og $P_5I_5$ møtast i eitt punkt.