Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Finale 2023–2024 – *Løsninger*

5. mars 2024

Oppgave 1.

a. Vi skriver heller betingelsen i oppgaven på formen $s_n \equiv t_n \mod n$. Dersom $1 \le k \le n$ og k er relativt primisk til n, så er også $n-k$ relativt primisk til n, og $n-k \neq k$. Dermed kan s_n skrives som en sum av ledd på formen $k+(n-k)=n$, slik at $s_n \equiv 0 \mod n$. Regnet modulo n er således $t_n \equiv s_n + t_n = n(n+1)/2$. Dersom n er et oddetall, kan vi skrive $t_n \equiv n\frac{n+1}{2} \equiv 0$, men om n er et partall, har vi istedet $t_n \equiv \frac{n}{2}(n+1) \equiv \frac{n}{2} \not\equiv 0$. Altså holder betingelsen når n er et oddetall, men ikke når n er et partall.

b. Vi skal se at $f(n) = n \pm 1$ for alle n. Den gitte betingelsen med $m=2$ gir at $f(n) \neq n$ for alle $n \in \mathbb{Z}$. Anta først at $f(n) > n+1$, og sett $m = f(n) - n$. Så er $f(n) \equiv n \mod m$ og $m > 1$, som er en motsigelse. Anta så at $f(n) < n-1$, og sett $m = n - f(n)$. Nå er nok en gang $f(n) \equiv n \mod m$ og $m > 1$, atter en motsigelse. Dermed er den første påstanden vist.

Med $m = 3$ ser vi at $f(f(n)) \neq n$ for alle n. Men da kan det ikke finnes noen n slik at $f(n) = n+1$ mens $f(n+1) = (n+1)-1 = n$. Siden $f(n) = n+1$ og $f(n) = n-1$ er de eneste to mulighetene for hver n, må enten $f(n) = n+1$ for alle $n \in \mathbb{Z}$, eller $f(n) = n-1$ for alle $n \in \mathbb{Z}$, eller det finnes en $n_0 \in \mathbb{Z}$ slik at $f(n) = n+1$ for $n \ge n_0$ og $f(n) = n-1$ for $n < n_0$. Alle de tre mulighetene definerer en funksjon f som oppfyller betingelsene i oppgaven.

Oppgave 2.

a. Det kan være enklere i stedet å arbeide med $b_1, b_2, \ldots, b_n$ der $b_i = a_i - a_{i-1}$. Så er kravet at ingen sum av typen $\sum_{k=i}^{j} b_k$ (med $j \ge i$) skal være et primtall, og målet å minimere summen $b_1 + \cdots + b_n$. (Åpenbart velger vi $a_0 = 1$, så $a_n = 1 + b_1 + \cdots + b_n$.) De fire minste mulige verdiene for hver enkelt b_i er 1, 4, 6 og 8. Dersom $b_i = 1$ må $b_{i\pm1} \ge 8$, ettersom $1+1$, $1+4$ og $1+6$ er primtall.

Beste alternativ for $n = 3$ er $(b_1, b_2, b_3) = (1, 8, 1)$, som gir $a_3 = 11$. (Beste alternativ uten enere i følgen er $(4, 4, 4)$ som gir $a_3 = 13$.)

Beste alternativ for $n > 3$ er $b_i = 4$ for alle i, spm gir $a_n = 1 + 4n$. Dersom vi skulle forbedre en slik følge, måtte vi ha $b_i = 1$ i noen plasser i følgen. Vi samler enerne i *klumper*, der en klump er en følge $b_i, b_{i+1}, \ldots, b_{i+2j}$ der $b_{i+2k} = 1$ for $k = 0, \ldots, j$, og $b_{i-2} \neq 1$ (eller $i \le 2$) og $b_{i+2j+2} \neq 1$ (eller $i + 2j + 2 > n$). Men summen av en slik klump blir $b_i + \cdots + b_{i+2j} \ge (j+1) + 8j = 9j + 1 \ge 4(2j+1)$ når $j \ge 3$, så en klump med $j \ge 3$ gir ingen forbedring over en følge med $b_k = 4$ hele veien. En klump med $j = 2$, altså lengde 5, er heller ingen forbedring, for $(1, 8, 1, 8, 1)$ kan ikke brukes, ettersom $8 + 1 + 8$ er et primtall. Heller ikke $(1, 8, 1, 9, 1)$ kan brukes, fordi $1 + 8 + 1 + 9$ er et primtall. Dermed er summen av en klump av lengde 5 større enn $20 = 5 \cdot 4$. Det gjenstår å betrakte klumper av lengde 3, altså $(1, 8, 1)$. Men en slik klump kan ikke ha 4 foran eller bak, og vi ender opp med minst 8 foran eller bak, som ødelegger fordelen over $(4, 4, 4)$ – unntatt når $n = 3$, som vi har sett.

b. La $P(x,y)$ betegne den gitte funksjonalligningen. Fra $P(0,y)$ får vi $f(0)=0$. Fra $P(x,0)$ får vi så $xf(f(x)) = f(0)+x^2 = x^2$, altså $f(f(x)) = x$ (for $x \neq 0$, men det gjelder også for $x=0$ fordi $f(0)=0$). Deretter ser vi på $P(x,-f(x))$ og bruker det vi har utledet, og får $0 = f(-xf(x)) + f(x)^2$. Til sist prøver vi $P(f(x),-x)$ med resultat $0 = f(-xf(x)) + x^2$. Sammenligning av de to siste formlene leder til $f(x)^2 = x^2$, altså $f(x) = \pm x$ for alle x. Begge funksjonene gitt ved $f(x)=x$ og $f(x)=-x$ løser funksjonalligningen. Dersom det finnes $x \neq 0$ og $z \neq 0$ med $f(x)=x$ og $f(z)=-z$, kan vi skrive $z = xy$, altså $f(xy) = -xy$, og $P(x,y)$ reduseres til $xf(x+y) = -xy + x^2$. Dersom $f(x+y) = x+y$ må $xy=-xy$, en motsigelse. Og $f(x+y) = -(x+y)$ gir $-x^2 = x^2$, som heller ikke er sant. Det finnes altså ikke flere løsninger enn de to vi har funnet.

Oppgave 3.

a. Nettverket til Matteland-agentene er en graf, der nodene er agenter og det er en kant mellom to agenter dersom de kan kommunisere direkte seg imellom. Avstanden $d(i,j)$ mellom agent i og agent j er det minste antall kanter i en vei i grafen mellom de to. (Oppgaveteksten er flertydig på dette punktet, men konklusjonen er uavhengig av den eksakte definisjonen av avstand, så lenge avviket mellom definisjonene er en konstant. Definisjonen brukt her gir det mest likefremme beviset.) Avstanden oppfyller trekantulikheten $d(i,k) \leq d(i,j) + d(j,k)$. Andreas har en liste over størrelsene $m(i) = \max(d(i,N), d(i,E))$ der N og E står for Noah og Edvard. Andreas ønsker å bestemme $x = d(N,E)$.

Dersom node i er på en korteste vei mellom N og E, er $d(i,N) + d(i,E) = d(N,E) = x$, så $2m(i) \geq x$. Hvis x er et partall og i er midt på veien mellom D og E, har vi likhet, så $x = 2m(i)$. Men hvis x er et oddetall, er det ingen node midt på den korteste veien. For de to nodene nærmest midten, er $d(i,N) = d(i,E) \pm 1$, og dermed $x = 2m(i)+1$.

En skulle tro at man kan skille mellom x partall og x odde ved å se hvor mange noder i minimerer $m(i)$. Dersom det er bare én korteste vei mellom N og E, vil én eller to noder minimere $m(i)$, avhengig av om x er et partall eller oddetall. Men fordi det kan finnes flere korteste veier, og (viktigere) flere enn ett midtpunkt (eller nesten-midtpunkt) mellom N og E, fører ikke det frem.

Vi har neglisjert noder som ikke ligger på en korteste vei mellom N og E, men det er enkelt: For en slik node j er $d(j,N) + d(j,E) > x$, så $2m(j) > x$.

Konklusjon: Andreas finner minste verdi μ for $m(i)$, og alt han nå kan vite, er at $d(N,E)$ er enten 2μ eller $2\mu+1$. Er han riktig heldig og det er bare én node med $m(i) = \mu$, så vet han at $d(N,E) = 2\mu$.

b. La N være halvparten av summen $1 + 2 + \cdots + 4048$, altså $N = 2024 \cdot 4049$. Det er opplagt at enhver 2024-tabell har en jevn fargelegging med rødsum $\geq N$: For hvis en gitt fargelegging har rødsum $< N$, kan vi bare snu om på fargeleggingen, altså bytte rødt mot svart, så får vi en ny jevn fargelegging med rødsum $> N$. For å vise at N er det største tallet med denne egenskapen, må vi finne en 2024-tabell slik at enhver jevn fargelegging har rødsum lik N.

Når vi skal beskrive en 2024-tabell, kan vi la kolonne j være (a_j, b_j) med a_j i første rad og b_j i andre rad. En javn rødfarging kan beskrives med $r_j = \pm 1$, der $r_j = +1$ om a_j er rødfarget, og $r_j = -1$ om b_j er rødfarget. Da må $r_1 + \cdots + r_{2024} = 0$, og rødsummen blir

$$R = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{2024} \big((1 + r_j)a_j + (1 - r_j)b_j\big) = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{2024} (a_j + b_j) - \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{2024} r_j c_j = N - \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{2024} r_j c_j$$

der $c_j = b_j - a_j$. La nå $a_j = 2j - 1$ og $b_j = 2j$, for $j = 1, \ldots, 2024$. Så er $c_j = 1$ for alle j, og betingelsen $\sum r_j = 0$ gir $R = N$. Det vil si, alle jevne fargelegginger gir samme rødsum N.

Samme argument virker dersom c_j er en konstant uavhengig av j, ikke nødvendigvis 1. Det er også en nødvendig betingelse, for om $c_i \neq c_j$, får vi forskjellig resultat ved å velge henholdsvis $(r_i, r_j) = (1, -1)$ og $(r_i, r_j) = (-1, 1)$.

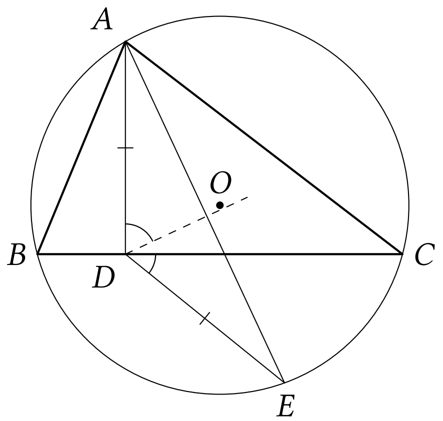
Vi må altså telle opp antall 2024-tabeller der $b_j - a_j = d$ (uavhengig av j) for alle j. Vi kan telle bare de med $d > 0$ og gange med 2, og så kan vi alltid sortere kolonnene etter den ene raden, la oss si $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2024}$, og så ganger vi antallet med 2024! etterpå.

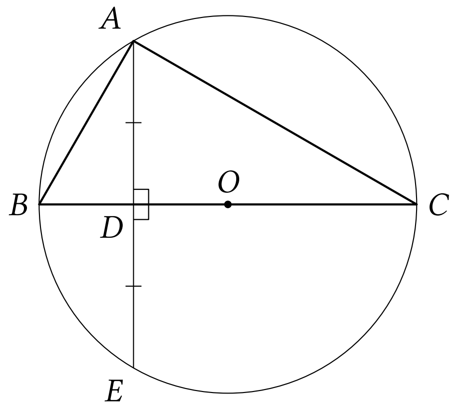
For å få til $d = 1$, kan vi fylle fra venstre ende og se at vi ikke har andre muligheter enn den vi konstruerte ovenfor. Så anta $d > 1$. Igjen starter vi å fylle inn fra venstre ende, og ser at vi ikke har andre muligheter enn å sette $a_j = j$ og $b_j = j + d$ for $j = 1, \ldots, n$. Så har vi brukt opp tallene $1 \ldots 2d$, og starter på ny frisk. Det samme skjer igjen og igjen, og det går ikke opp i andre enden med mindre $d \mid 2024$.

Men $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ har $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ divisorer, og vi konkluderer med at det finnes $66 \cdot 2 \cdot 2024! = 32 \cdot 2024!$ 2024-tabeller med den søkte egenskapen.

Oppgave 4.

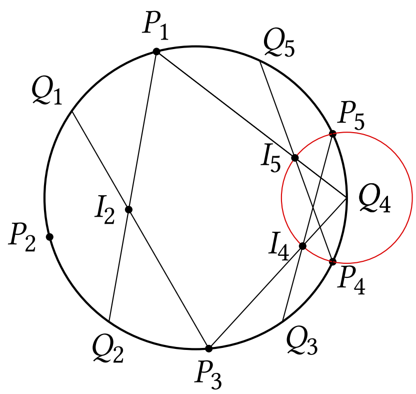
a. Vi avslører konklusjonen med det samme: Vinkelen BAC må være rett, som vist i figuren til høyre. Figuren til venstre, som altså ikke kan være riktig, er bedre egnet til å illustrere argumentet.





Trekk linjestykket AE. Midtnormalen (stiplet i figuren) passerer gjennom D og halverer vinkelen ADE, fordi $AD = DE$. Men midtnormalen til en sirkelsekant passerer gjennom sentrum i sirkelen, så O skulle ligget på den stiplede linjen. Fordi $\angle ADO = \angle CDE$ og DO er vinkelhhalveringslinjen til ADE, må $\angle CDO = 0^\circ$ slik at O ligger på BC, Det vil si at BC må være en diameter i sirkelen, og $\angle BAC = 90^\circ$.

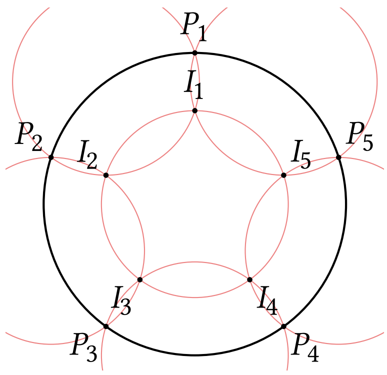
b. (Figuren er ikke korrekt, i den forstand at $I_1I_2I_3I_4I_5$ ikke er syklisk. Men den kan brukes til den første delen, som ikke avhenger av den hypotesen.)



La Q_i være midtpunktet på sirkelbuen mellom P_i og P_{i+1}. Om man halverer en periferivinkel, halveres også sirkelbuen den skjærer ut, takket være periferivinkelteoremet. Derfor vil linjen $P_{i+1}Q_{i-1}$ halvere $\angle P_{i-1}P_{i+1}P_i$, og $P_{i-1}Q_i$ halverer $\angle P_iP_{i-1}P_{i+1}$, slik at I_i blir skjæringspunktet mellom de to linjene. Se tilfellet $i = 2$ i venstre halvdel av figuren.

I høyre halvdel av figuren har vi tegnet inn sirkelen med sentrum i Q_4 som passerer gjennom P_4 og P_5. Her ser vi at $\angle P_4P_5Q_3 = \frac{1}{2}\angle P_3Q_4P_4$, fordi begge er periferivinkler i den opprinnelige (store) sirkelen, mens den første skjærer ut en bue som er halvparten av buen den andre skjærer ut. Men fordi den første av disse vinklene er en periferivinkel og den andre en sentralvinkel i den lille sirkelen, og begge passerer gjennom P_4, må det andre benet av hver vinkel skjære den lille sirkelen i samme punkt. Dette punktet er I_4, per definisjon. På samme måte ser vi at I_5 også ligger på den samme sirkelen. Ved å øke alle indeksene med 1, 2, 3 og 4 (syklisk), ser vi at firkanten $P_iI_iI_{i+1}P_{i+1}$ er syklisk, og Q_i er sentrum i omsirkelen.

Påstand: *Firkanten $P_2I_2I_5P_5$ er syklisk.*



Beviset for påstanden er vinkeljakt. Vi skal bruke rettede vinkelmål angitt ved symbolet $\measuredangle$, slik at $\measuredangle CAB = -\measuredangle BAC$. Vinkler som avviker med et heltallig multiplum av 360°, regnes som like. Spesielt er en firkant $ABCD$ syklisk hvis og bare hvis $\measuredangle DAB = \measuredangle DCB + 180°$. Vi kan også addere vinkler: $\measuredangle BAC + \measuredangle CAD = \measuredangle BAD$ uansett hvordan punktene ligger innbyrdes.

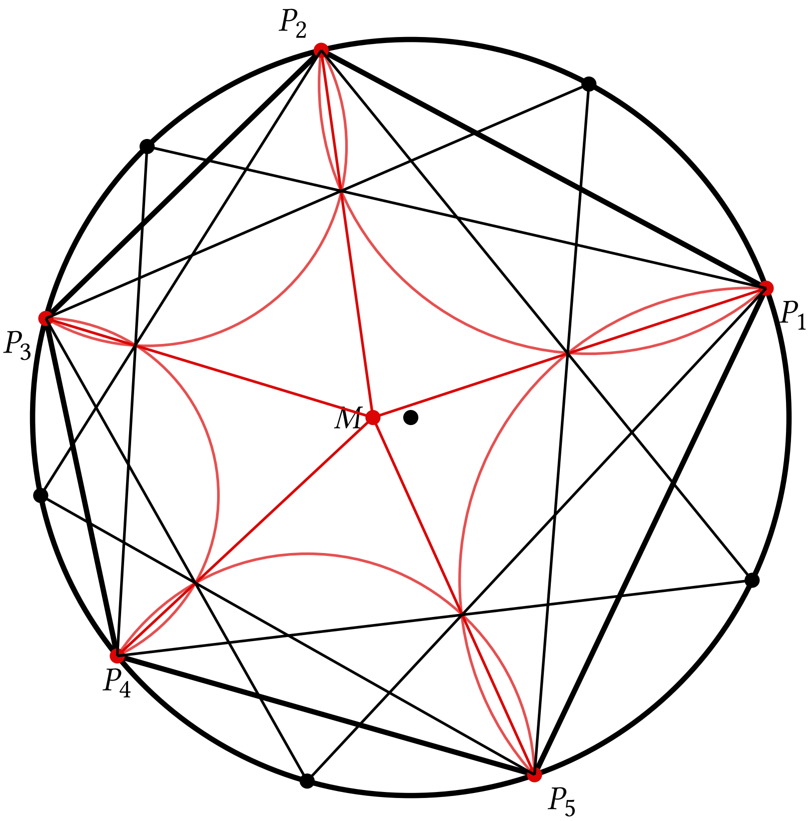
I figuren har vi benyttet regulære femkanter for enkelhets skyld. (Det er en overforenkling vi ikke må bruke i beviset!) Vi har tegnet inn relevante sirkler for å hjelpe oss å holde styr på de mange firkantene vi *vet* er sykliske mens vinkeljakten pågår. Vinkeljakten går stort sett fra venstre mot høyre i nedre del av figuren. Er du klar? Da setter vi i gang:

$$\begin{aligned}
\measuredangle P_2I_2I_5 &= \measuredangle P_2I_2I_3 + \measuredangle I_3I_2I_5 && \text{addisjon}\\
&= \measuredangle P_2P_3I_3 + \measuredangle I_3I_4I_5 && \text{to sykliske firkanter}\\
&= \measuredangle P_2P_3I_3 + \measuredangle I_3I_4P_4 + \measuredangle P_4I_4I_5 && \text{addisjon}\\
&= \measuredangle P_2P_3I_3 + \measuredangle I_3P_3P_4 + \measuredangle P_4I_4I_5 + 180^\circ && \text{en syklisk firkant}\\
&= \measuredangle P_2P_3P_4 + \measuredangle P_4I_4I_5 + 180^\circ && \text{addisjon}\\
&= \measuredangle P_2P_5P_4 + \measuredangle P_4P_5I_5 + 180^\circ && \text{to sykliske firkanter}\\
&= \measuredangle P_2P_5I_5 + 180^\circ && \text{addisjon}
\end{aligned}$$

Dermed er påstanden bevist.

Beviset avsluttes nå raskt ved help av teorien for *potenslinjer*, iblant også kalt *radikalakser* (et lån fra engelsk terminologi). La oss skrive $P : \omega$ for potensen til et punkt P i forhold til en sirkel ω. To ikke-konsentriske sirkler ω_1 og ω_2 har en potenslinje $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$ som består av alle punkter P med $P : \omega_1 = P : \omega_2$. Potenslinjen er en linje som står ortogonalt på linjestykket mellom de to sirkelsentrene. Dersom sirklene skjærer hverandre i to punkter, er potenslinjen rett og slett linjen gjennom de to skjæringspunktene. Gitt tre sirkler ω_1, ω_2 og ω_3 med sentre som ikke ligger på linje, så vil alle de tre potenslinjene skjære hverandre i et felles punkt. For $\Lambda(\omega_1, \omega_2)$ og $\Lambda(\omega_2, \omega_3)$ er ikke parallelle, og de skjærer hverandre derfor i et punkt P. Men så er $P\omega_1 = P : \omega_2 = P : \omega_3$, slik at P også ligger på $\Lambda(\omega_1, \omega_3)$.

Tilbake til saken: La ω_{12} være omsirkelen til $P_1I_1I_2P_2$, og ω_{51} være omsirkelen til $P_5I_5I_1P_1$ La også ω_{52} være omsirkelen til $P_5I_5I_2P_2$ (vi har jo nettopp vist at denne firkanten er syklisk). Så skjærer ω_{12} og ω_{51} hverandre i P_1 og I_1, mens ω_{12} og ω_{52} skjærer hverandre i P_2 og I_2, og ω_{51} og ω_{52} skjærer hverandre i P_5 og I_5. I følge teorien i forrige avsnitt vil da linjene P_5I_5, P_1I_1 og P_2I_2 skjære hverandre i ett felles punkt. Det samme må gjelder P_1I_1, P_2I_2 og P_3I_3 ved samme argument og det gjelder også P_2I_2, P_3I_3 og P_4I_4. Det følger at alle de fem linjene P_iI_i møtes i ett felles punkt.



Figuren over illustrerer at situasjonen gitt i oppgaven også kan forekomme for ikke-regulære femkanter. De svarte punktene på sirkelranden ligger midtveis på sirkelbuen mellom P_i og P_{i+1}, og de tynne svarte linjene er vinkelhalveringslinjer i trekantene $P_{i-1}P_iP_{i+1}$. De røde sirklene skjærer hverandre parvis i punktene P_i og I_i, og linjene P_iI_i møtes alle i det røde punktet M, litt til venstre for sirkelsentrum. (At også femkanten $I_1I_2I_3I_4I_5$ er syklisk vises ikke figuren. Den er overlesset nok som den er.)