Niels Henrik Abels matematikkonkurranse
Andre runde 2021–2022 – *Løsninger*

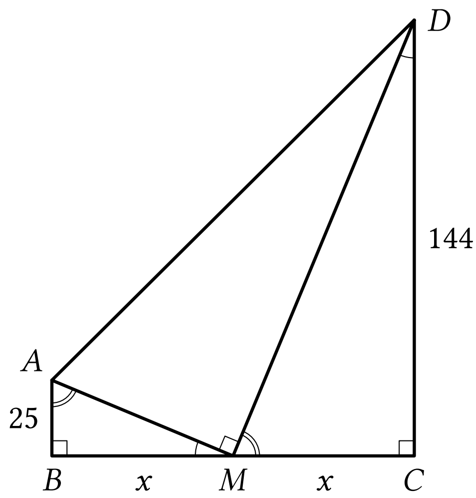
20. januar 2022

Oppgave 1. Primtallsfaktoriseringen av de gitte tallene er $12 = 2^2 \cdot 3$, $14 = 2 \cdot 7$ og $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Minste felles multiplum blir $2^2 \cdot 3 \cdot 7$. **84**

Oppgave 2. Om vi skriver m og n for tallet som dannes av henholdsvis de to første og de to siste sifrene, har Nils 100 valg med $n = m$, nemlig $m = 00$, 01, …, 99. Han har 99 valg med $n = m + 1$ ($m = 99$ går ikke), 98 valg med $n = m + 2$, og 97 valg med $n = m - 3$. Tilsvarende gjelder for $m = n + 1$, $m = n + 2$ og $m = n + 3$, så svaret blir $100 + 2(99 + 98 + 97)$. **688**

Oppgave 3. Ettersom $50000 = 4 \cdot 12500$, dekker planten 12500 kvadratmeter bare to dager før den dekker 50000 kvadratmeter. **26**

Oppgave 4. De likeformede trekantene gir at $25/x = x/144$, der $x = |BM| = |MC|$. Dermed er $x^2 = 25 \cdot 144$, så $x = 5 \cdot 12 = 60$. Likeformethet gir også like vinkler som antydet i figuren, og fordi vinkelsummen i ABM er 180°, må vinkelen AMD være rett. Nå kommer vi i mål med gjentatt bruk av Pytagoras: $|AM|^2 = 25^2 + 60^2 = 5^2(5^2 + 12^2) = 5^2 \cdot 169$, så $|AM| = 5 \cdot 13$. På samme måte er $|MD|^2 = 60^2 + 144^2 = 12^2(5^2 + 12^2) = 12^2 \cdot 169$, så $|MD| = 12 \cdot 13$. Til sist er $|AD|^2 = |AM|^2 + |MD|^2 = (5^2 + 12^2) \cdot 13^2 = 13^4$, så $|AD| = 13^2 = 169$. . . . **169**



Oppgave 5. Om vi ser bort fra Cecilies ark, får vi bare $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ mulige valg for plasseringen av Anne og Berits ark. (Fullstendig oppregning: AABB, ABAB, ABBA, BAAB, BABA, BBAA.) Når så Cecilie skal plassere sine to ark til slutt, spiller det ingen rolle hvilke av arkene på bordet som tilhører hvem. Vi kan bare markere dem med bokstaven X, slik at mulighetene blir CCXXXX, CXCXXX, og så videre. Hun kan plassere sine to ark blant seks posisjoner på $\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = 15$ måter. I alt er det $6 \cdot 15 = 90$ forskjellige rekkefølger. **90**

Oppgave 6. Om bussen bruker a timer på vei A, b timer på vei B og c timer på vei C, er altså $a + b = 5$, $a + c = 4$ og $b + c = 3$. Differansen mellom de to første ligningene gir $b - c = 1$, og legger vi til den siste, får vi $2b = 4$, altså $b = 2$. Nå er det lett å finne at $c = 1$ og $a = 3$. De tre fartene på vei A, B og C er henholdsvis $90/3 = 30$, $90/2 = 45$ og $90/1 = 90$ kilometer per time. Gjennomsnittet av disse er $(30 + 45 + 90)/3 = 55$. **55**

Oppgave 7. Vi faktoriserer hver faktor i 10! i primfaktorer, og samler potenser av hvert primtall for seg. Resultatet er $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Divisorene til dette tallet har formen $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d$ med $0 \le a \le 8$, $0 \le b \le 4$, $0 \le c \le 2$ og $0 \le d \le 1$. Det gir i alt $9 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 270$ mulige divisorer. Av disse er $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ kvadrattall (altså med a, b, c og d partall). Så svaret er $270 - 30 = 240$. **240**

Oppgave 8. Vi kan spesifisere en lagkombinasjon ved å velge ut alle de som lag B sender, sammen med de som lag A *ikke* sender. Dette er tilsammen 5 personer av 12, og de kan velges på i alt $\binom{12}{5} = \frac{12!}{7!5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = 11 \cdot 9 \cdot 8 =$ 792 måter. Men en av disse kombinasjonene er ikke tillatt, nemlig når alle 5 er tilhører lag A. Det vil jo si at ingen av lagene sender noen. Så vi må trekke fra 1, og får 791 som svar

Alternativ løsning, mer rett frem men litt mer regning: Men kan velge k personer fra lag A på $\binom{5}{k}$ måter, og k personer fra lag B på $\binom{7}{k}$ måter. Vi summerer og får $\binom{5}{1}\binom{7}{1} + \binom{5}{2}\binom{7}{2} + \binom{5}{3}\binom{7}{3} + \binom{5}{4}\binom{7}{4} + \binom{5}{5}\binom{7}{5} = 5 \cdot 7 + 10 \cdot 21 + 10 \cdot 35 + 5 \cdot 35 + 1 \cdot 21$. Tallene hentes ut av Pascals trekant. **791**

Oppgave 9. Merk først at $792 = 8 \cdot 99$. Hvis vi dividerer Nils' tall $N = 101112\ldots9899$ med 8, bestemmes resten bare av de tre siste sifrene, fordi 8 går opp i 1000. Men $899 = 8 \cdot 12 + 3$, så *den* resten er 3. Fordi 100 gir rest 1 når vi divererer med 99, og det samme gjelder om vi dividerer 100^k med 99, får tallet til Nils samme rest som tallet $10 + 11 + 12 + \cdots + 97 + 98 + 99 = 4905$ etter divisjon med 99. Vi gjentar resonnementet, og finner resten $49 + 5 = 54$.

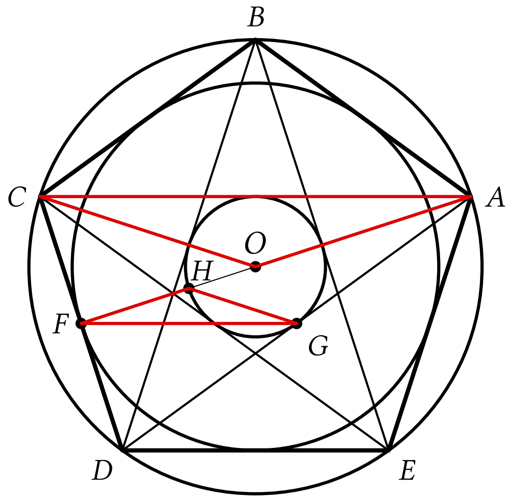
Dette er ikke ulikt hvordan du finner resten etter divisjon med 9 ved å ta tverrsummen igjen og igjen inntil du står tilbake med ett siffer. Her gjør vi det samme i et tallsystem med grunntall 100.

Så langt har vi at $8 \mid N - 3$ og $99 \mid N - 54$. ($m \mid n$ betyr at m går opp i n.)

Spesielt er $N - 54 = 99\,i$ for et heltall i, og derfor $N - 3 = 99\,i + 51 = 99(i+1) - 48$. Fordi $8 \mid N - 3$ og $8 \mid 48$, må $8 \mid 99(i+1)$, og derfor $8 \mid i + 1$, siden 8 og 99 ikke har noen felles faktor større enn 1 (de er «innbyrdes primiske»). La oss si $i + 1 = 8\,j$, slik at $N - 3 = 792\,j - 48$, altså $N = 792\,j - 45$. Siden resten vi ser etter må ligge mellom 0 og 792, må $j = 1$, så $N = 792 - 45 = 747$.

Dersom du er kjent med moduloregning, kan denne løsningen skrives noe kortere. Løsningsmetoden er inspirert av såkalte *kinesiske rester*. Slike problemer ble undersøkt av Sūnzĭ Suànjīng en gang i tredje til femte århundre etter vår tidsregning. **747**

Oppgave 10. Her får vi bruk for periferivinkel-setningen et par ganger. For eksempel er $\angle COD = 72^\circ$, så $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle COD = 36^\circ$.

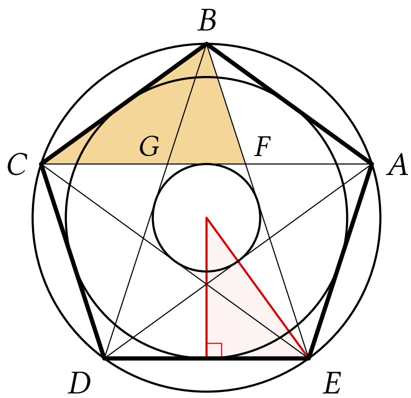


I figuren er F og G midtpunktet på henholdsvis CD og AD. Linjestykket AF skjærer den minste sirkelen i H. Dette linjestykket halverer $\angle CAD$, så $\angle FAC = 18^\circ$

Fordi F og G er midtpunkter på to av sidene i trekanten ACD, er $FG \parallel AC$. Men da er $\angle GFH = \angle FAC = 18^\circ$.

Fordi $\angle GOA = 72^\circ$, gir periferivinkel-setningen at $\angle GHA = 36^\circ$. Vi har $\angle GFH + \angle FGH = \angle GHA$, så $\angle FGH = 18^\circ$. Altså er trekanten FHG likebent, og derfor likeformet med AOC, siden den også er likebent, og de to har en felles vinkel. Størrelsesforholdet mellom de to trekantene er $|AC|/|FG| = 2$, igjen fordi F og G er midtpunkter på to av sidene i trekanten ACD, Men så er også $|OA|/|HF| = 2$. Men $|OA| = 1814$, så $|HF| = 907$. Det er da også forskjellen mellom radiene til de to innskrevne sirklene. **907**

Alternativ løsning (skisse): En mer likefrem (men også mer omstendelig) tilnærming til problemet deler det opp i to trinn: Beregne størrelsesforholdet mellom de to innskrevne sirklene, som er det samme som størrelsesforholdet mellom de to femkantene, og beregne størrelsesforholdet mellom den innskrevne og den omskrevne sirkelen til en regulær femkant.



Det viser seg at disse to størrelsesforholdene er henholdsvis $G + 1$ og $G/2$, der $G = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1{,}618\ldots$ er det *gyldne snitt*.

Det første av disse forholdene finner man ved å betrakte likeformede trekanter med vinkler 72°, 72° og 36° i figuren, spesielt BCF og FBG.

Det andre forholdet finner man ved hjelp av den røde trekanten i figuren. Vi overlater til leseren å (prøve å) fylle inn detaljene.

Men vi tar med den siste delen av beregningen: Den største innskrevne sirkelen får radius $1814 \cdot G/2 = 907\,G$, så den minste sirkelen får radius $907\,G/(G+1)$. Det gyldne snitt oppfyller ligningen $G^2 = G + 1$, så

$$G - \frac{G}{G+1} = \frac{G^2 + G - G}{G+1} = \frac{G^2}{G+1} = 1,$$

slik at differansen mellom de to radiene rett og slett blir 907. . . . . **907**