Telenor

Abel-konkurransen 2000–2001

FINALE - 15. mars 2001

Tid: 4 timer
På hver oppgave gis det inntil 10 poeng

Oppgave 1

a) Anta at a, b, c er reelle tall slik at $a+b+c > 0$, og slik at likningen $ax^2+bx+c=0$ ikke har noen reelle løsninger. Vis at $c > 0$.

b) Anta at x og y er positive, reelle tall slik at x^3, y^3 og $x+y$ alle er rasjonale tall. Vis at tallene xy, x^2+y^2, x og y er rasjonale.

Oppgave 2

La A være en mengde, og la $P(A)$ være mengden av alle ikketomme delmengder av A. (Hvis for eksempel $A = \{1,2,3\}$, så er $P(A) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.) En delmengde F av $P(A)$ kalles *kraftig* dersom følgende er oppfylt: Hvis B_1 og B_2 er elementer i F, så er også $B_1 \cup B_2$ et element i F. Anta at F og G er kraftige delmengder av $P(A)$.

a) Er unionen $F \cup G$ nødvendigvis kraftig?

b) Er snittet $F \cap G$ nødvendigvis kraftig?

Oppgave 3

a) Hva er største mulige areal av en firkant med sidelengder 1, 4, 7 og 8?

b) Diagonalene AC og BD i den konvekse firkanten $ABCD$ skjærer hverandre i S. La F_1 og F_2 være arealene av $\triangle ABS$ og $\triangle CSD$, og la F være arealet av hele $ABCD$. Vis at

$$\sqrt{F_1} + \sqrt{F_2} \leq \sqrt{F}.$$

Oppgave 4

Ved en todagers lagkonkurranse i sjakk deltar tre skoler med 15 elever hver. Hver elev spiller ett parti mot hver spiller på de to andre lagene, altså i alt 30 sjakkpartier per elev.

a) Er det mulig at hver elev har spilt nøyaktig 15 partier etter første dag?

b) Vis at det er mulig at hver elev har spilt nøyaktig 16 partier etter første dag.

c) Anta at hver elev har spilt nøyaktig 16 partier etter første dag. Vis at det finnes tre elever, en fra hver skole, som har spilt sine tre innbyrdes partier.