ABELFINALEN 2000-01

Løsninger

Oppgave 1. a) Sett $f(x) = ax^2 + bx + c$. Vi har at $f(1) = a + b + c > 0$. Siden funksjonen ikke har reelle nullpunkter må $f(x) > 0$ for alle x. Dette gir at $c = f(0) > 0$.

Alternativ løsning: At $ax^2 + bx + c = 0$ ikke har reelle løsninger kan uttrykkes ved at $b^2 - 4ac < 0$. Anta $c \leq 0$. Siden $4ac > b^2 \geq 0$ må vi ha at $a < 0$. $b > -(a + c)$ gir at $b^2 > a^2 + c^2 + 2ac = (a - c)^2 + 4ac \geq 4ac$ som motstrider betingelsen $b^2 - 4ac < 0$. Altså er $c > 0$.

b) $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$ er rasjonal. Dermed er $3x^2y + 3xy^2 = 3xy(x + y)$ rasjonal, og dermed også xy. $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ er rasjonal, som gir at $x^2 + y^2$ rasjonal. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ er rasjonal, og parantesen $(x^2 + xy + y^2)$ er rasjonal ved det vi har vist over. Dermed er $x - y$ rasjonal. Det følger at $(x + y) + (x - y) = 2x$ og $(x + y) - (x - y) = 2y$ er rasjonale, og dermed er x og y rasjonale.

Oppgave 2. a) Nei. Et moteksempel er $A = \{1, 2, \cancel{3}\}$, $F = \{\{1\}\}$, $G = \{\{2\}\}$. Da er både F og G kraftige delmengder av $P(A)$, men $F \cup G = \{\{1\}, \{2\}\}$ er ikke kraftig siden den ikke inneholder elementet $\{1, 2\}$.

b) Ja. Anta F og G er kraftige delmengder av $P(A)$ der A er en vilkårlig mengde. Vi skal vise at $F \cap G$ er kraftig. Anta B_1 og B_2 er med i $F \cap G$. Da er spesielt B_1 og B_2 med i F, og siden F er kraftig så er $B_1 \cup B_2$ med i F. Tilsvarende er $B_1 \cup B_2$ med i G. Det følger at $B_1 \cup B_2$ er med i $F \cap G$, og dermed er $F \cap G$ kraftig.

Oppgave 3. a) Vi kan anta at sidene med lengder 1 og 8 er ved siden av hverandre. (Hvis ikke kan man klippe opp firkanten langs en diagonal og snu den ene trekanten uten at arealet endres.) Det holder altså å betrakte firkanter $ABCD$ der $AB = 1$, $BC = 4$, $CD = 7$ og $DA = 8$. Arealet av trekant ABD er $\frac{1}{2}(1 \cdot 8) \sin A \leq 4$ og arealet av CDB er $\frac{1}{2}(4 \cdot 7) \sin C \leq 14$. Så arealet av firkanten kan ikke være større enn 18. Men siden $1^2 + 8^2 = 65 = 4^2 + 7^2$ kan vi konstruere en slik firkant med areal 18 ved å lime sammen langs hypotenusen de to rettvinklete trekantene med sidelengder henholdsvis $1, 8, \sqrt{65}$ og $4, 7, \sqrt{65}$.

b) La $a = AS, b = BS, c = CS, d = DS$, og la $v = \angle ASB$. Da er $F_1 = \frac{1}{2}ab \sin v$, $F_2 = \frac{1}{2}cd \sin v$ og $F = \frac{1}{2}(ab + bc + cd + da) \sin v$. Det er derfor nok å vise at $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \leq \sqrt{ab + bc + cd + da}$, som etter kvadrering er ekvivalent med $ab + cd + 2\sqrt{ab}\sqrt{cd} \leq ab + bc + cd + da$. Men denne ulikheten kan skrives om til $(\sqrt{bc} - \sqrt{da})^2 \geq 0$ som alltid er oppfylt.

15·15·3=675

Oppgave 4. a) Nei. Anta at det er mulig. Da ville det totalt ha vært ~~$15 \cdot 15 = 225$~~ ganger en elev hadde vært involvert i et sjakkparti. Siden det er to elever per sjakkparti, får vi ~~$225/2$~~ sjakkpartier som ikke er mulig.

675/2

b) En måte å gjøre dette på er følgende: La de tre lagene hete A, B og C, og la spillerne hete $A_1, A_2, \ldots, A_{15}$ og tilsvarende for lag B og C. La så først spillerne fra lag A spille mot spillerne fra lag B slik at A_1 spiller mot $B_1, \ldots, B_8$, A_2 spiller mot $B_2, \ldots, B_9$, og så videre til at A_{15} spiller mot $B_{15}, B_1 \ldots, B_7$. Etter dette vil hver spiller på lag A og B ha spilt 8 partier. Så gjøres tilsvarende mellom lag A og C og mellom lag B og C. Etter dette vil alle ha spilt nøyaktig 16 partier.

c) Hvis en elev har møtt r spillere fra den ene motstanderskolen, har han/hun møtt $16 - r$ elever fra den andre. La m være den minste verdien av r eller $16 - r$ blant alle elevene. Uten tap av generalitet kan vi anta at minste verdien oppnås av elev A_1 på lag A, og at A_1 har spilt mot nøyaktig m elever fra lag B. La B_k være en av de som har spilt mot A_1. B_k har møtt minst m spillere fra lag C, mens A_1 har møtt $16 - m$ spillere fra lag C. Da har A_1 og B_k spilt mot tilsammen 16 spillere fra lag C. Men siden lag C bare har 15 spillere, må minst en av disse ha spilt mot både A_1 og B_k. Dermed vil A_1, B_k og spilleren fra lag C ha spilt alle sine tre innbyrdes partier.