ABELKONKURRANSEN 2001-02

Finale, 15. mars 2002

kl. 09.00–13.00

Oppgave 1.

a) Finn alle hele tall k slik at både $k+1$ og $16k+1$ er kvadrattall.

b) Finn alle hele tall c slik at likningen $(2a+b)(2b+a)=5^c$ har heltallige løsninger.

Oppgave 2.

a) La x være et positivt reelt tall. Vis at $x+1/x \geq 2$.

b) La $n \geq 2$ være et positivt heltall, og la $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ være positive reelle tall slik at

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Vis at

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \ldots + \frac{x_n}{y_n}.$$

c) Hvis a og b er reelle tall slik at $a^3 - 3ab^2 = 8$ og $b^3 - 3a^2b = 11$, hva er da $a^2 + b^2$?

Oppgave 3.

a) Det er gitt en sirkel med sentrum i O. To parallelle tangenter tangerer sirkelen i punktene M og N. En annen tangent skjærer de to første tangentene i punktene K og L. Vis at sirkelen som har linjestykket KL som diameter går gjennom O.

b) Seks linjestykker med lengder 17, 18, 19, 20, 21 og 23 danner sidekantene til en triangulær pyramide (også kalt et tetraeder). Kan det finnes en kule som tangerer alle de seks linjestykkene?

Oppgave 4.

Det er gitt et heltall $N > 1$. Arne og Britt spiller følgende spill:

(1) Arne sier et positivt heltall A.

(2) Britt sier et heltall $B > 1$ som enten er en divisor av A eller et multippel av A. (A selv er en mulighet.)

(3) Arne sier et nytt tall A som er enten $B-1$, B eller $B+1$.

Spillet fortsetter ved å gjenta punkt 2 og 3. Britt vinner hvis hun greier å få sagt tallet N før det 50. tallet er blitt sagt. Ellers vinner Arne.

a) Vis at Arne har en vinnende strategi dersom $N = 10$.

b) Vis at Britt har en vinnende strategi dersom $N = 24$.

c) For hvilke N har Britt en vinnende strategi?