Abel-konkurransen 2001–2002

Fasit til første runde

Oppgave 1: Hvis antall gutter er x, så har vi at $x + (x + 3) = 27$, som gir $x = 12$.
D

Oppgave 2: Gjennomsnittet er $(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4})/3 = (\frac{6}{12} + \frac{8}{12} + \frac{9}{12})/3 = 23/36$. **D**

Oppgave 3: $(0,3)^3/0,9 = (\frac{27}{1000})/(\frac{9}{10}) = 3/100 = 0,03$. **D**

Oppgave 4: $6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 + 6^6 = 6 \cdot (6^6) = 6^7$. **C**

Oppgave 5: Skriv $x = m(m + n)$. Hvis n er et oddetall, blir $m + n$ et partall og dermed blir x et partall. Hvis n er et partall, blir $m+n$ et oddetall og x blir et oddetall. Dermed har x og n alltid motsatt paritet, og x er et oddetall bare hvis n er et partall.
E

Oppgave 6: La x være lengden av den vannrette siden til rektangelet med areal 6, og la y være lengden av den vannrette siden til rektangelet med areal 10, og la A være arealet av det 4. rektangelet. Da er $10/6 = y/x = A/15$ som gir at $A = 15 \cdot 10/6 = 25$.
C

Oppgave 7: $1-3+5-7+9-\ldots+2001 = 1+(-3+5)+(-7+9)+\ldots+(-1999+2001)$. Det er 500 parenteser, så summen blir $1 + 2 + 2 + \ldots + 2 = 1 + 500 \cdot 2 = 1001$.
B

Oppgave 8: La l være linjen gitt ved $y = 2x - 6$. Linjen l har stigningstall 2 og skjærer linjen gitt ved $x = 1$ i punktet $(1, -4)$. Speilbildet av l om $x = 1$ vil ha stigningstall -2 og også gå gjennom $(1, -4)$. Den speilede linjen får dermed likning $y + 4 = -2(x - 1)$ som kan skrives om til $y = -2x - 2$. **B**

Oppgave 9: Tallet n kan skrives enten som $3t$, $3t + 1$ eller $3t + 2$ der t er et heltall. Hvis $n = 3t$ så er $n(n + 1) = 3t(3t + 1)$ delelig med 3, så resten er 0 i dette tilfellet. Hvis $n = 3t + 1$, så er $n(n + 1) = (3t + 1)(3t + 2) = 9t^2 + 9t + 2$ som har rest 2 etter divisjon med 3. Hvis $n = 3t + 2$, så er $n(n + 1) = (3t + 2)(3t + 3) = 3(3t + 2)(t + 1)$ delelig med 3, og resten blir 0. De mulige verdiene for resten er altså 0 og 2. **D**

Oppgave 10: $c > 0$ er ekvivalent med at $f(0) > 0$ som betyr at parabelen skjærer den positive delen av y-aksen. Parabelens bunnpunkt har x-koordinat $-b/2a$ som er negativ. Eneste alternativ som tilfredsstiller disse to kravene er A. **A**

Oppgave 11: Den første sylinderen har høyde a og grunnflate πb^2. Dermed er $V_a = \pi a b^2$. Tilsvarende er $V_b = \pi a^2 b$, og dermed er $V_a/V_b = ab^2/a^2b = b/a$. **B**

Oppgave 12: De minste kubikktallene større enn 1 er $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ og $4^3 = 64$. Det minste av disse som er et kvadrattall, er 64. **B**

Oppgave 13: Ved Pytagoras finner vi at høyden til trekant ABC er $\sqrt{3}$ og arealet til ABC er dermed $\sqrt{3}$. Betingelsen $AF = 2FC$ gir at $AF = \frac{2}{3}AC$. Dermed er $Areal(AEF) = \frac{2}{3}Areal(AEC) = \frac{1}{3}Areal(ABC)$. Det følger at $Areal(BCFE) = \frac{2}{3}Areal(ABC) = 2\sqrt{3}/3$. **B**

Oppgave 14: Betrakt mengden $A = \{000000, 000001, 000002, \ldots, 999998, 999999\}$ av alle mulige ikkenegative 6 sifrede tall der vi også tillater at tall begynner med nuller. Det er klart at antallet det spørres om i oppgaven er lik antall 5'ere totalt i mengden A. Det er også klart at hvert av sifrene (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) forekommer like mange ganger i A. Mengden A har 1 million tall som hver består av 6 sifre, altså er det totalt 6 millioner sifre i A, og sifferet 5 vil dermed forekomme 600000 ganger. **E**

Oppgave 15: Multipliserer vi den andre likningen med 9 og setter inn $3x = 25 - 4y$ fra den første, får vi $(25 - 4y)^2 + 9y^2 = 225$. Forenklet blir dette $y^2 - 8y - 16 = 0$ eller $(y-4)^2 = 0$, som har $y = 4$ som eneste løsning. Den første likningen gir nå $x = 3$, som også passer i den andre likningen. Vi får altså tallparet $(3, 4)$ som eneste mulighet. (Dette kan også ses geometrisk ved å observere at likningene beskriver en sirkel og en linje som tangerer hverandre) **B**

Oppgave 16: Ved Pytagoras ser vi at $BC = 5$, og dermed er $XC = \frac{5}{2}$. Siden $\tan C = 3/4 = XY/(\frac{5}{2})$, får vi at $XY = (3/4)(5/2) = 15/8$. **C**

Oppgave 17: Siden linjestykkene AB og PQ ikke har variabel lengde, er det nok å minimere summen $AP + BQ$. La $C = (8, 10)$ og la $D = (0, -6)$. Siden $BQ = CP$ og $AP = DP$, er det nok å minimere summen $CP + PD$. Men $CP + PD$ er opplagt minimal når P ligger på den rette linjen mellom C og D. Denne linjen skjærer x-aksen i $(3, 0)$. For at firkanten $APQB$ skal ha minimal omkrets, må altså P ha x-koordinat 3. Midtpunktet på PQ har da x-koordinat 7. **A**

Oppgave 18: La de 6 tallene være $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$. Opplysningene i oppgaven gir at $a_1 = 4$, $a_3 = 4 + a_2$, $a_4 = a_2 + a_3 = 4 + 2a_2$, $a_5 = a_3 + a_4 = 8 + 3a_2$ og $a_6 = a_4 + a_5 = 12 + 5a_2 = 517$. Løser vi den siste likningen, får vi $5a_2 = 505$ som gir at $a_2 = 101$. **A**

Oppgave 19: Observer først at $DE = 3$. La F være fotpunktet til normalen fra B på AC.

Trekantene ADE og ABF er formlike, og fordi $AB = 2AD$ får vi at $BF = 2DE = 6$ og $AF = 2AE = 8$.

Dermed er $FC = 4$. BC finner vi nå ved Pytagoras brukt på trekant BCF: $BC = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$. **D**

Oppgave 20: Av tallene i mengden A er det 7 som er på formen $7t$, 8 som er på formen $7t+1$, mens det er 7 som er på hver av formene $7t+2, 7t+3, 7t+4, 7t+5$ og $7t+6$. I de tallene som plukkes ut, kan vi ikke både ha tall på formen $7t+1$ og $7t+6$. Så blant de 15 tallene som er på en av disse formene, kan vi maksimalt ha med 8 (alle på formen $7t+1$). Tilsvarende kan vi maksimalt ha med 7 blant tallene på formen $7t+2$ og $7t+5$, og vi kan maksimalt ha med 7 blant tallene på formen $7t+3$ og $7t+4$. I tillegg kan vi maksimalt ha med 1 av tallene som er delelig med 7. Det er altså ikke mulig å plukke ut mer enn $8+7+7+1 = 23$ tall. Det er lett å se at 23 er mulig. Ta for eksempel alle de 22 tallene på formene $7t+1, 7t+2, 7t+3$ sammen med ett tall på formen $7t$.
D