Telenor

Abel-konkurransen 2001–2002
Fasit til andre runde

Oppgave 1: Ved å bruke konjugatsetningen på de to første parantesene og på de to siste kan produktet skrives om til $(2\sqrt{30}+4)(2\sqrt{30}-4) = 120-16 = 104$.
104

Oppgave 2: Alle de 3 tallene er på formen am der a er et positivt heltall. Siden det er 3 tall må det største være minst $3m$, og dermed er $3m < 100$ og $m \le 33$. Men $m = 33$ er mulig ved å velge tallene 33, 66 og 99. **33**

Oppgave 3: Det er to muligheter for 5.plassen, deretter er det to muligheter for 4.plass, to muligheter for 3.plass og to muligheter for 2.plass. Totalt blir det $2^4 = 16$ muligheter. **16**

Oppgave 4: $x_n = n/x_{n-1}$ gir at $x_{n-1}x_n = n$ og dermed er $x_1x_2\ldots x_8 = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8 = 384$. **384**

Oppgave 5: Diagonalen i en terning med sidelengde s er $\sqrt{3}s$ (dette kan man se ved å bruke Pythagoras to ganger). I terningen på figuren er sidelengden $2r$, mens diagonalen er $2R$. Dermed er forholdet mellom R og r det samme som mellom diagonal og side i terningen, altså $x = \sqrt{3}$. Dette gir at $120x^2 = 360$.
360

Oppgave 6: Anta at rulletrappen i bevegelse holder en fart på x trinn per sekund. Med en fart på $x+1$ trinn/sek tar det altså 20 sekunder å komme opp, og med en fart på $x+2$ trinn/sek tar det 16 sekunder. Antall trinn kan altså uttrykkes både som $20(x+1)$ og $16(x+2)$. Likningen $20(x+1) = 16(x+2)$ har $x = 3$ som eneste løsning, som gir at trappen totalt har 80 trinn. **80**

Oppgave 7: La E være fotpunktet til normalen fra D på AC. Da er trekantene ABD og AED kongruente. Dermed er $DE = BD = x$ og $EC = 5 - AE = 5 - AB = 2$. Observer nå at trekantene CED og CBA er formlike, slik at $ED/EC = BA/BC = 3/4$. Dette gir at $x = ED = 3/2$, og dermed er $60x^2 = 60\cdot 9/4 = 135$.
135

Oppgave 8: La F_k betegne antall måter tallet k kan skrives som en sum av 1-tall og 2-tall. Da er opplagt $F_1 = 1$ og $F_2 = 2$. Hvis $k \geq 3$ kan er $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ fordi av summene som gir tallet k må det være F_{k-1} som begynner med et 1-tall og F_{k-2} som begynner med et 2-tall. Dermed blir F_k (for $k = 1, 2, \ldots$) Fibonacci-tallene: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... og det tiende tallet er alstå 89.

89

Oppgave 9: Vi kan skrive om $p^2 - 1$ til $(p-1)(p+1)$. Hvis dette skal være delelig med 17, så må (siden 17 er et primtall) 17 gå opp i en av faktorene $(p-1)$ eller $(p+1)$, dvs. at p må kunne skrives som enten $17t + 1$ eller $17t - 1$ der t er et heltall. For at $17t \pm 1$ skal være et oddetall så må t være et partall. Vi prøver de minste aktuelle verdiene av t: $t = 2$ gir tallene 33 og 35 som ingen er primtall, $t = 4$ gir tallene 67 og 69, og 67 er et primtall. **67**

Oppgave 10: La $ABCD$ være parallellogrammet, der vi antar at BD er den korteste diagonalen. La $\alpha = \angle A$. Da er ved cosinussetningen $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos\alpha$. Setter vi inn får vi $85 = 13 + 74 - 2\sqrt{13 \cdot 74}\cos\alpha$ eller $\sqrt{962}\cos\alpha = 1$. Arealet av parallellogrammet kan uttrykkes ved $AB \cdot AD \sin\alpha$. Kvadratet av arealet er dermed $13 \cdot 74 \sin^2\alpha = 962(1 - \cos^2\alpha) = 962(1 - 1/962) = 962(961/962) = 961$. **961**