Abelkonkurransen 2002–2003

FINALE

13. mars 2003

ABEL PRISEN

Tid: 4 timer
For hver av de fire oppgavene gis 10 poeng for en fullstendig besvarelse.

Oppgave 1

(a) La x og y være reelle tall slik at $x + y = 2$ og $x^3 + y^3 = 3$. Hva er da $x^2 + y^2$?

(b) La $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være n reelle tall i et intervall $[m, M]$ slik at $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Vis at

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq -nmM.$$

Oppgave 2

(a) Finn alle par (x, y) av hele tall slik at $y^3 + 5 = x(y^2 + 2)$.

(b) La $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være n forskjellige positive heltall der $n \geq 1$. Vis at

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)^2.$$

Oppgave 3

La ABC være en trekant med $AC > BC$, og la S være trekantens omskrevne sirkel. AB deler S i to buer. La D være midtpunktet på den buen som inneholder C.

(a) Vis at $\angle ACB + 2 \cdot \angle ACD = 180°$.

(b) La videre E være fotpunktet for normalen fra D på AC. Vis at $BC + CE = AE$.

Oppgave 4

(a) 25 gutter og 25 jenter sitter rundt et bord. Vis at det finnes en person som har en jente sittende på hver side av seg.

(b) La $m \geq 3$ være et helt tall. På en leir er det mer enn m deltakere. Leirsjefen oppdager at hver gang han plukker ut m av leirdeltakerne, så har de nøyaktig én felles venn blant deltakerne. Hva er det største mulige antall deltakere på leiren? (Hvis A er venn med B, er B også venn med A. En person regnes ikke som venn med seg selv.)