Abelkonkurransen 2002–2003

Løsninger på finaleoppgavene

Oppgave 1

(a) Siden $3 = x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$, blir $x^2-xy+y^2 = \frac{3}{2}$. Dessuten er $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = 4$. Vi får dermed at $3(x^2+y^2) = (x+y)^2 + 2(x^2-xy+y^2) = 4+3 = 7$, så $x^2+y^2 = \frac{7}{3}$.

(b) Siden $x_i \in [m, M]$, er $(x_i - m)(M - x_i) \geq 0$. Dette betyr at $x_i^2 \leq (m+M)x_i - mM$ for alle i. Derfor blir

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq (m+M)\sum_{i=1}^{n} x_i - nmM = -nmM.$$

Oppgave 2

(a) Siden $z = y^2+2$ er en faktor i y^3+5, er z også en faktor i $y^3+5-y\cdot z = 5-2y$. Derfor er z også en faktor i $4z + (5+2y)\cdot(5-2y) = 8+25 = 33$. Siden $z = y^2+2 \geq 2$, får vi tre muligheter: $y^2+2 \in \{3, 11, 33\}$. Dette gir $y^2 \in \{1, 9, 31\}$, hvor det siste alternativet er umulig. Med andre ord må $y \in \{\pm 1, \pm 3\}$. Regner vi nå ut x ved $x = \frac{y^3+5}{y^2+2}$, ser vi at vi har to heltallsløsninger, nemlig: $(x, y) \in \{(-2, -3), (2, 1)\}$.

(b) Vi kan ved symmetri anta at $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. For $n = 1$ er ulikheten opplagt. Så anta at $\sum_{i=1}^{k} a_i^3 \geq (\sum_{i=1}^{k} a_i)^2$ for et helt tall $k \geq 1$. Vi merker oss at siden $1 \leq a_1 < \cdots < a_k < a_{k+1}$, har vi at $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq 1+2+\cdots+a_k = \frac{1}{2}a_k(a_k+1) \leq \frac{1}{2}(a_{k+1}-1)a_{k+1}$. Dermed gjelder også at:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)a_{k+1} + a_{k+1}^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} a_i^3 + 2\cdot\tfrac{1}{2}(a_{k+1}-1)a_{k+1}^2 + a_{k+1}^2 = \sum_{i=1}^{k+1} a_i^3\end{aligned}$$

Det følger derfor ved induksjon at $\sum_{i=1}^{n} a_i^3 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$ for alle $n \geq 1$.

Oppgave 3

(a) Vi ser at $\angle BCD + \angle BAD = 180°$ siden $ABCD$ er syklisk, og siden D er midtpunktet på buen AB, er $\angle BAD = \angle ABD$. Dessuten er $\angle ACD = \angle ABD$ ved setningen om periferivinkler. Til sammen gir dette at $\angle ACB + 2\cdot\angle ACD = 180°$.

(b) La F være punktet på forlengelsen av AC (utenfor sirkelen) slik at $FC = BC$. Vi vil starte med å vise at trekantene BCD og FCD er kongurente. Vi har at $\angle FCD = 180° - \angle ACD = \angle BCD$. Siden trekantene i tillegg har to par av like lange sider (CD felles og $FC = BC$), er den ene speilbildet av den andre. Dette betyr at $FD = BD = AD$, og vi innser at E er midtpunktet på AF. Dette gir som ønsket at $AE = FE = FC + CE = BC + CE$.

Oppgave 4

(a) Plukk ut annenhver person og plasser dem rundt et annet bord i samme rekkefølge. Rundt et av bordene sitter det nå minst 13 jenter. To av disse er nødt til å sitte ved siden av hverandre. Rundt det opprinnelige bordet satt derfor disse jentene med en person mellom seg, som er det vi skulle vise.

(b) Vi vil først vise at det finnes en gruppe på $m+1$ deltakere hvor alle er venner med alle andre. Velg m av deltakerne. Disse har en felles venn, så spesielt finnes det to deltakere som er venner. Velg en gruppe på m deltakere som inneholder disse to første. Disse har da en felles venn, som sammen med de to første, danner en gruppe på tre hvor alle er venner. Ved å fortsette denne prosessen vil vi til slutt ha dannet en gruppe G med $m+1$ deltakere hvor alle er innbyrdes venner.

Anta at det finnes en leirdeltaker P i tillegg til disse $m+1$. Anta at P har to venner i G. Se på gruppa som består av de $m-1$ andre i G samt P. Disse m har nå minst to felles venner, nemlig de to siste i G. Denne motsigelsen gir at P har maksimalt én venn i G. Velg en gruppe som består av P og $m-1$ deltakere fra G, deriblant P's eventuelle venn. Disse har en felles venn Q. Q er ikke med i gruppa G siden P ikke har flere venner fra G. Q er venn med $m-1 \geq 2$ deltakere fra gruppa G, men dette er umulig som vist ovenfor. Altså er det $m+1$ leirdeltakere, og alle er venner med alle.