Telenor

Abel-konkurransen 2002–2003

Fasit til første runde

Oppgave 1: $1001 + 2002 + 3003 + \ldots + 9009 = 45045$. **B**

Oppgave 2: Siden $DE = CE$ er $\angle ECD = \angle EDC = 60°$, og trekanten er dermed likesidet. Vi har at $DC = AB = 4$. Trekantens omkrets er dermed $4 + 4 + 4 = 12$. **C**

Oppgave 3: Det siste sifferet i produktet 743589×301647 er det samme som det siste sifferet i $9 \times 7 = 63$. Resten vi får når vi deler med 5 er dermed 3. **D**

Oppgave 4: $3x + 9 = 7x + 17$ gir at $x = -2$. Innsatt gir dette $4 + 2k = 3$ og det følger at $k = -1/2$. **B**

Oppgave 5: Vi bruker Pythagoras på den rettvinklede trekanten med stigen som hypotenus og kateter langs veggen og bakken. Hvis stigens lengde er x, så er katetene x-2 og 5, og vi får at $x^2 = (x-2)^2 + 25$. Ganger vi ut dette og forkorter x^2, får vi $4x = 29$ og dermed $x = 7,25$. **B**

Oppgave 6: Trekk den vannrette linjen gjennom midtpunktet på PQ. Da vil den delen av rektangelet som ligger over denne linjen ha samme areal som det skraverte området. Siden høyden til P og Q over DC er henheldsvis $1/2$ og $2/3$ av rektangelets høyde, vil høyden til denne linjen være $(1/2 + 1/3)/2 = 7/12$ av rektangelets høyde. Arealet av det skraverte området er dermed $1 - 7/12 = 5/12$ av arealet av hele rektangelet. **D**

Oppgave 7: Ved konjugatsetningen er $61^2 - 39^2 = (61+39)(61-39) = 100 \cdot 22$ og $51^2 - 49^2 = (51+49)(51-49) = 100 \cdot 2$. Brøken i oppgaven kan dermed forkortes med 100, og vi står igjen med $22/2 = 11$. **B**

Oppgave 8: Siden summen av vinklene i en trekant er $180°$, får vi at $\angle E + \angle F = 180° - 40° = 140°$. Vi ser også at $\angle DAC = 180° - \angle E$ og at $\angle DBC = 180° - \angle F$. Siden summen av vinklene i en firkant er $360°$, får vi at $\angle ACB = 360° - (180° - \angle E) - (180° - \angle F) - 40° = \angle E + \angle F - 40° = 140° - 40° = 100°$. **D**

Oppgave 9: I første kolonne finner vi tallene $2, 10, 18, \ldots, 2 + 8t, \ldots$. Her finnes også tallet $2002 = 2 + 250 \cdot 8$. **A**

Oppgave 10: Siden bussene kjører i 75 km/h og har avgang hvert 20 minutt, så er avstanden mellom busser som kjører i samme retning 25 km. Når Birgitte blir tatt igjen av en buss, så er den neste bussen altså 25 km bak henne. Siden bussen tar innpå med 75-15 = 60 km/h, vil den ta henne igjen etter 25/60 timer eller 25 minutter. Tilsvarende, når Birgitte møter en buss, er den neste motgående bussen 25 km unna. Birgitte og bussen nærmer seg hverandre med 90 km/h, og vil dermed møtes etter 25/90 timer eller $16\frac{2}{3}$ minutter. Dette gir at $x + y = 16\frac{2}{3} + 25 = 41\frac{2}{3}$. **C**

Oppgave 11: Hvis vi ser bort fra kravet om kjønnsrepresentasjon, så er antall mulige komitéer lik binomialkoeffisienten $\binom{7}{3} = 35$. Antall komitéer med bare gutter er 4, og antall komiteer med bare jenter er 1. I de resterende 30 komiteene er dermed begge kjønn representert. **C**

Oppgave 12: Tallet kan skrives om slik $2^{40} \cdot 5^{30} = 2^{10} \cdot 10^{30} = 1024 \cdot 10^{30}$. Dette er altså tallet 1024 etterfulgt av 30 nuller. Totalt blir det dermed 34 sifre. **E**

Oppgave 13: I en terning med sidelengde s, er lengden av diagonalen $\sqrt{s^2 + s^2 + s^2} = \sqrt{3}s$ (dette sees ved å bruke Pythagoras to ganger). Terningen i oppgaven har dermed sidelengde 2, og volumet blir $2^3 = 8$. **A**

Oppgave 14: $f(x + 2) - f(x + 1) = 3^{x+2} - 3^{x+1} = 9 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^x = 6 \cdot 3^x = 6f(x)$. **D**

Oppgave 15: Antall måter å ordne rekkefølgen på de tre nasjonene er $3! = 6$. Innad i nasjonene er det $3! = 6$ måter plassere de norske, $4! = 24$ måter å plassere svenskene, og 2 måter å plassere finnene. Totalt antall mulige plasseringer er dermed $6 \cdot 6 \cdot 24 \cdot 2 = 1728$. **E**

Oppgave 16: De tre delene av båndet som ikke ligger inntil rørene er hver to radier lange. De delene av båndet som ligger inntil rørene er til sammen like lange som omkretsen til en av sirklene. Lengden på båndet er dermed $3 + \pi$. **B**

Oppgave 17: Et punkt (x, y) ligger på den roterte kurven hvis og bare hvis $(-x, -y)$ ligger på den opprinnelige kurven. Likningen for den roterte kurven får vi derfor ved å sette inn $(-x, -y)$ for (x, y) i likningen i oppgaven. Dette gir $-y = x^2 + 6x + 11$ som kan skrives om til $y = -x^2 - 6x - 11$. **E**

Oppgave 18: Hvis n er et partall har vi $S_n = (1-2)+(3-4)+\ldots+(n-1-n) = -n/2$, og hvis n er et oddetall har vi $S_n = 1+(-2+3)+(-4+5)+\ldots+(-(n-1)+n) = (n+1)/2$. Dermed er $S_{17} + S_{33} + S_{50} = 9 + 17 - 25 = 1$. **B**

Oppgave 19: Observer først at $2002 = 286 \cdot 7$ er delelig med 7. Vi kan derfor skrive $2003^{2002} = (7t+1)^{2002}$ der $t = 286$. Hvis vi bruker binomialformelen på dette uttrykket, vil alle ledd unntatt det siste inneholde faktoren 7. Siden det siste leddet er 1, vil resten etter division med 7 bli 1. **B**

Oppgave 20: Hvis vi kvadrerer brøken i oppgaveteksten, får vi $(a+b)^2/(a-b)^2 = (a^2+b^2+2ab)/(a^2+b^2-2ab) = (6ab+2ab)/(6ab-2ab) = 2$. Uttrykket vi er på jakt etter er dermed $\sqrt{2}$. (Brøken er positiv siden $a-b$ og $a+b$ er større enn 0.) **B**

FASIT:

1: B			11: C		
2: C			12: E		
3: D			13: A		
4: B			14: D		
5: B			15: E		
6: D			16: B		
7: B			17: E		
8: D			18: B		
9: A			19: B		
10: C			20: B		

BRUKSANVISNING

Denne tabellen har samme format som svartabellen i oppgavesettet. Ved å klippe den ut og klippe ut de to spaltene kan du, ved å legge dette tablået over svaret, raskt finne ut hvor mange riktige og gale svar det er. Pass bare på i tilfelle noen har skrevet noe utenfor rutene.