FINALE — LØSNINGER

Oppgave 1

a) Summen av heltallene fra s til t er $s+(s+1)+(s+2)+\cdots+t=(t+s)(t-s+1)/2$. Observer at tallene $t+s$ og $t-s+1$ har motsatt paritet, slik at det ene er et oddetall, mens det andre er et partall. Summen har altså en odde faktor, og kan dermed ikke være en potens av 2.

b) Anta at det er flere enn a_1 ulykkelige tall i følgen. Da vil minst to av disse, a_i og a_j få samme rest ved divisjon med a_1. Hvis vi antar at $i<j$, får vi en relasjon $a_j=a_i+ka_1$ der k er et positivt heltall. Fra dette følger at a_j er lykkelig, og vi har en motsigelse. Det er altså maksimalt a_1 ulykkelige tall i følgen.

Oppgave 2

a) Observer først at for alle reelle tall a og b så gjelder $2ab\le a^2+b^2$. (Dette er ekvivalent med $(a-b)^2\ge 0$.) Vi får nå: $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz\le x^2+y^2+z^2+(x^2+y^2)+(x^2+z^2)+(y^2+z^2)=3(x^2+y^2+z^2)$.

b) Anta at ulikheten ikke er oppfylt, det vil si at $a^2+b^2+c^2<\sqrt{3}abc$. Da er $a^2b^2c^2\le(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)<3\sqrt{3}abc$, der vi i den midterste ulikheten brukte resultatet i a). Dette medfører at $abc<3\sqrt{3}$. Ved AGM-ulikeheten er $3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\le a^2+b^2+c^2<\sqrt{3}abc$, og dette gir at $abc>3\sqrt{3}$. Vi har en motsigelse, og ulikheten i oppgaven er dermed oppfylt.

Oppgave 3

a) Betrakt sirkelen med AD som diameter. Siden $\angle B=90°$, så ligger B på sirkelbuen. Siden summen av vinklene i en firkant er $360°$, så er også $\angle D=90°$, slik at alle hjørnene ligger på denne sirkelen. La nå O være sentrum i sirkelen, og N midtpunktet på BD, slik at $\angle OND=90°$ og $DN=\frac{3}{2}$. Siden $\angle A=60°$, følger det fra setningen om periferivinkler at $\angle DOB=120°$, og dermed er $\angle DON=60°$. (Hvis du ikke kan denne setningen, kan du summere vinklene i firkanten $ABOD$ og bruke at trekantene AOD og AOB er likebeinte, til å beregne $\angle DOB$). Det følger at $r=DN/\sin 60°=\sqrt{3}$.

b) Betrakt trekanten OMN. Vi vet at $NM=1/2$ og at $ON=r/2$ (siden DON er en 30°-60°-90°-trekant). Ved Pythagoras finner vi at $OM=1$, slik at OMN er en 30°-60°-90°-trekant. Det følger at $\angle AOD=90°$, og at arealet av trekant ACD er $(2r)r/2=r^2=3$. De to trekantene ACD og ACB har grunnlinjen AC felles, mens høydene er i forholdet 2:1. Arealet av ACB er dermed $\frac{3}{2}$, og arealet av firkanten er $9/2$.

Oppgave 4

a) Dann en gruppe A bestående av $n/2$ av innbyggerne, og la gruppe B bestå av resten. Anta at to personer er venner hvis og bare hvis de er i forskjellige grupper. Det er da til sammen $n^2/4$ vennskapsrelasjoner. Men siden to personer fra samme gruppe ikke kan ha noen felles steiner, så må alle disse $n^2/4$ vennskapsrelasjonene ha forskjellige typer steiner. Altså kan det hende at man trenger $n^2/4$ typer steiner.

b) Vi vil vise dette ved induksjon. For $n=2$ så holder det opplagt med én stein. Anta at påstanden er sann for $n=k$, og at det er $k+2$ personer på øya. Hvis ingen er venner, så trengs det ingen steiner. I motsatt fall finnes det to personer, P og Q, som er venner. La oss se bort fra P og Q et øyeblikk. De k øvrige personene kan ved induksjonsantakelsen lage seg halsbånd som oppfyller kravene, med $k^2/4$ eller færre typer steiner. For hver av disse k personene er det nå 3 muligheter: Hvis personen er venn med både P og Q, så holder det å introdusere én ny type stein. Hvis personen er venn med P, men ikke med Q (eller omvendt), holder det også med én ny type. Hvis personen verken er venn med P eller Q, så trengs det ingen nye steiner. I tillegg kan det bli nødvendig med en ny type stein for å markere vennskapet mellom P og Q. Dermed trengs det maksimalt $k+1$ steintyper i tillegg til de som var fra før, slik at det totalt trengs maksimalt $k^2/4+k+1=(k+2)^2/4$ steintyper. Resultatet følger nå ved induksjon.