Abel-konkurransen 2003–2004

Fasit til første runde

Oppgave 1: Siden Per har 2 rader foran seg og 3 rader bak seg, er det til sammen 6 rader. Tilsvarende er det 7 rekker. Totalt antall pulter er dermed $6 \cdot 7 = 42$. **B**

Oppgave 2: $\sqrt{95}$ er størst. **D**

Oppgave 3: Siden $a = \frac{10}{3}$, får vi at $b = \frac{10}{3} + \frac{3}{10} = \frac{100+9}{30} = \frac{109}{30}$. **C**

Oppgave 4: Det er 1 meter/5 cm $=$ 20 trekanter som peker oppover. Tilsvarende er det 20 trekanter som peker nedover. Til sammen blir det dermed 40 trekanter. **B**

Oppgave 5: Opplysningene i oppgaven gir at $a + b = 40$ og $b + 15 = c$. Setter vi $b = c - 15$ inn i den første likningen, får vi $a + c = 55$. Gjennomsnittet av a og c er dermed 27,5. **E**

Oppgave 6: Det minste primtallet større enn 10, er 11. Tallet x må derfor være $11 \cdot 11 = 121$. Summen av sifrene blir dermed $1 + 2 + 1 = 4$. **A**

Oppgave 7: Observer at $a_2 = 2 + 1$, $a_3 = 3 + 2 + 1$, $a_4 = 4 + 3 + 2 + 1$ og så videre til $a_{19} = 19 + 18 + \ldots + 2 + 1 = \frac{1}{2} \cdot 19 \cdot 20 = 190$. **B**

Oppgave 8: Hvis Matias tapte x ganger, vant han $20 - x$ ganger. Poengsummen etter de 20 rundene er da $100 + 4(20 - x) - 6x = 180 - 10x$. Siden dette er lik 130, må $x = 5$. **B**

Oppgave 9: La A, B og C være antall sopp som ble funnet av henholdsvis Anette, Berit og Cecilie. Opplysningene i oppgaven gir at $A + 70 = B + C$, $B + 52 = A + C$, og $C + 28 = A + B$. Legger vi sammen disse tre likningene, får vi $A + B + C + 150 = 2(A + B + C)$, som gir at $A + B + C = 150$. **D**

Oppgave 10: Forleng TP ned til gulvet, og la G være skjæringspunktet mellom forlengelsen og gulvet. Observer at vinkelen mellom speilet og forlengelsen er x (toppvinkler). Dette gir at vinkelsummen i $\triangle SPG$ er $26° + x + x + 90°$. Setter vi dette lik $180°$, får vi $2x = 64°$, altså $x = 32°$. **B**

Oppgave 11: De to gjetningene som er nevnt i oppgaveteksten, må ha en differanse på enten 3 eller 13. Det kan ikke ha vært Siri (23) og Johan (36), siden da ville enten Bjørg (28) eller Nina (31) ha gjettet riktig. Tilsvarende kan det ikke ha vært Bjørg (28) og Nina (31). Den eneste gjenværende muligheten er at de to nevnte gjetningene kom fra Nina (31) og Erik (44), med riktig svar 39. **E**

Oppgave 12: La P være skjæringspunktet mellom forlengelsene av HA og BC. Da er $\triangle PBA$ en 90°-45°-45°-trekant. Dermed er $\angle HAB = 180° - 45° = 135°$. Fordi $\triangle HAB$ er likebeint, får vi at $\angle ABH = \frac{1}{2} \cdot 45° = 22,5°$. Det følger at $\angle HBC = 180° - \angle HBP = 180° - 45° - 22,5° = 112,5°$. **E**

Oppgave 13: Hvis det ene sifferet er 0 eller 1, så blir summen større enn produktet. Hvis begge sifrene er 2, så blir summen lik produktet. I alle andre tilfeller blir produktet større enn summen. Det er $8 \cdot 8 = 64$ tosifrede tall der begge sifrene er 2 eller større. Antall slike tall der produktet av de to sifrene er større enn summen av sifrene, er dermed $64 - 1 = 63$. **D**

Oppgave 14: La den ene siden med lengde 2 være trekantens grunnlinje. For at høyden, og dermed arealet, skal bli størst mulig, må den andre siden med lengde 2 stå normalt på grunnlinjen. Lengden x av den tredje siden finner vi nå ved å bruke Pythagoras: $x = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. **B**

Oppgave 15: La oss først finne ut hvor mange femmere hun hadde. Hvis hun bare hadde 4 femmere, så ville det totalt bli maksimalt $4 \cdot 5 + 15 \cdot 1 = 35$ kroner. Altså må Laila ha hatt minst 5 femmere. Men hun kan ikke ha hatt 6 femmere, for da ville det blitt totalt minst $6 \cdot 5 + 13 \cdot 0,50 = 36,50$ kroner. Altså må hun ha hatt 5 femmere. De øvrige 14 myntene er da bare femtiøringer og kronestykker, og for at dette skal være $36 - 25 = 11$ kroner, må det være 6 femtiøringer og 8 kronestykker. **D**

Oppgave 16: Observer først at avstanden fra sentrum i kvadratet til et hjørne er $\sqrt{2}$. Radius i den store sirkelen er dermed $\sqrt{2} + 1$, og radius i den lille sirkelen er $\sqrt{2} - 1$. Arealet av den store sirkelen er $\pi(\sqrt{2}+1)^2 = (3+2\sqrt{2})\pi$, og arealet av den lille sirkelen er $\pi(\sqrt{2} - 1)^2 = (3 - 2\sqrt{2})\pi$. Differansen mellom de to arealene er dermed $4\sqrt{2}\pi$. **C**

Oppgave 17: For å komme seg fra S til T, må man til sammen bevege seg 10 lengder. Av disse må nøyaktig 4 være mot sør. Disse 4 kan være hvilke som helst av de 10 lengdene. Antall mulige veier er dermed lik binomialkoeffisienten $\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$. **D**

Oppgave 18: Observer at $3^4 = 81$ slutter på 1. Når vi ganger sammen to tall som begge slutter på 1, vil produktet også slutte på 1. Dermed vil siste siffer i tallet $3^{100} = (3^4)^{25} = 81^{25}$ bli 1. **B**

Oppgave 19: La P være punktet på AB som er slik at PD er parallell med AC. Fordi $\angle PDA = \angle DAC = 60°$, så er $\triangle APD$ likesidet. La oss kalle sidelengden for x. Trekantene $\triangle ABC$ og $\triangle PBD$ er formlike, og vi får $\frac{AC}{AB} = \frac{PD}{PB}$. Dette gir $\frac{3}{4} = \frac{x}{4-x}$. Løser vi denne likningen, får vi $x = AD = \frac{12}{7}$. **B**

Oppgave 20: Ganger vi ut parantesene, får vi $(u-1)(u^{12} + u^{13} + \cdots + u^{41}) = u^{13} + u^{14} + \cdots + u^{42} - u^{12} - u^{13} - \cdots - u^{41} = u^{42} - u^{12} = (u^6)^7 - (u^6)^2$. Siden $u^6 = 2$, blir dette lik $2^7 - 2^2 = 124$. **A**

FASIT:

1: B		11: E	
2: D		12: E	
3: C		13: D	
4: B		14: B	
5: E		15: D	
6: A		16: C	
7: B		17: D	
8: B		18: B	
9: D		19: B	
10: B		20: A	

BRUKSANVISNING

Denne tabellen har samme format som svartabellen i oppgavesettet. Ved å klippe den ut og klippe ut de to spaltene kan du, ved å legge dette tablået over svaret, raskt finne ut hvor mange riktige og gale svar det er. Pass bare på i tilfelle noen har skrevet noe utenfor rutene.