Abel-konkurransen 2003–2004

Fasit til andre runde

Oppgave 1: $(\sqrt{11}+\sqrt{44}+\sqrt{99})^2 = (\sqrt{11}+2\sqrt{11}+3\sqrt{11})^2 = (6\sqrt{11})^2 = 36 \cdot 11 = 396$. **396**

Oppgave 2: $9991 = 100^2 - 3^2 = 103 \cdot 97$. Siden både 103 og 97 er primtall, blir svaret 103. **103**

Oppgave 3: La x være avstanden fra M til B. Arealet av trapeset $MBCK$ er $12(10+x)/2 = 6x + 60$. Arealene av trekantene KLC og MBL er henholdsvis 30 og $3x$. Siden arealet av trekant KLM er 69, får vi at $60 + 6x = 30 + 3x + 69$ som gir $x = 13$. Avstanden fra A til M er dermed $20 - 13 = 7$. **7**

Oppgave 4: La s være strekningen i km, og la v være farten i km/t. Opplysningene i oppgaven gir at $s = vt = (v+1)\frac{4}{5}t = (v-1)(t+\frac{5}{2})$. Den midterste likheten gir $v = \frac{4}{5}(v+1)$, som gir at $v = 4$. Vi får nå $4t = 3(t + \frac{5}{2})$, og dermed $t = \frac{15}{2}$. Dette gir at $s = 4 \cdot \frac{15}{2} = 30$. **30**

Oppgave 5: La $x = \angle A$. Siden $AD = BD$, så er $\angle ABD = x$, og dermed er $\angle BDC = \angle DCB = 2x$. Det følger at $\angle DBC = 180° - 4x$, og at $\angle ABC = 180° - 3x$. Siden $\angle ABC = 99°$, får vi at $x = 27°$. **27**

Oppgave 6: Sjettegradspolynomet kan omskrives til $(x+1)^6 - 12(x+1)^2$. Siden $x \neq -1$, får vi $(x+1)^4 = 12$. Verdien av uttrykket $x(x^3+4x^2+6x+4) = (x+1)^4-1$ er dermed 11. **11**

Oppgave 7: La O og S være sentrum i henholdsvis den store og den lille sirkelen. La A være et av skjæringspunktene, og la P være midtpunktet på korden. Bruker vi Pythagoras på trekant APS, finner vi at $PS = 12$. Bruker vi Pythagoras på trekant APO, finner vi at $PO = 30$. Dette gir at $OS = 30 + 12 = 42$. **42**

Oppgave 8: Følgende 9 tall oppfyller betingelsene: 1111, 1222, 1333, 2123, 2231, 2312, 3132, 3213, 3321. Anta at vi har en liste med 10 eller flere tall. Da vil det finnes minst 4 av disse som har samme første siffer (siden det bare er 3 muligheter for det første sifferet). Men blant disse 4 må minst to ha samme siste siffer. Disse to tallene har dermed to felles sifre, og betingelsene i oppgaven er ikke oppfylt. **9**

Oppgave 9: La a, b og c være sidelengdene i trekanten, der c er hypotenusen og $c-a=50$. Siden $a^2+b^2=c^2$, er $b^2=(c-a)(c+a)=50(50+2a)$. Av dette ser vi at b må være delelig med både 2 og 5, og at $b>50$. $b=60$ er den minste verdien som oppfyller disse kravene, og dette svarer til den rettvinklede trekanten med sider 11, 60 og 61. **60**

Oppgave 10: Det er 6 måter å fylle den øverste raden med to hvite og to svarte brikker. For hver av disse er det også 6 muligheter for rad nummer to uten at betingelsen i oppgaven blir brutt. Av disse 6 mulighetene for rad nummer 2, er en helt lik første rad, en er omvendt, og de resterende fire har to sammenfallende farger med øverste rad. Det første tilfellet tillater bare en måte å plassere brikker i den tredje raden, det andre tilfellet tillater alle 6, og i det tredje tilfellet tillates to muligheter for å fylle opp den tredje raden. Når vi har plassert brikker i de tre første radene, kan den fjerde raden bare fylles på en måte. Det er dermed $6(1\cdot 1+1\cdot 6+4\cdot 2)=90$ måter å plassere brikkene på. **90**

FASIT:

1:	396	6:	11
2:	103	7:	42
3:	7	8:	9
4:	30	9:	60
5:	27	10:	90