Abel-konkurransen 2004–05
FINALE — LØSNINGER

Oppgave 1

a) Formelen $1+2+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$ gir at dersom m er et trekanttall, så er $8m+1$ er på formen $8 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$, som er et kvadrattall. Omvendt, hvis m er et positivt heltall slik at $8m+1$ er et kvadrat, så må $8m+1$ være på formen $(2n+1)^2$ (partallskvadrater er umulig, siden $8m+1$ er odde). Regningen over viser da at $m = 1+2+\cdots+n$, det vil si at m er et trekanttall.

b) La a, b og c være sidelengdene i den rettvinklede trekanten som utgjør grunnflaten, der c er hypotenusen. Volumet av pyramiden er da gitt ved formelen $V = \frac{1}{6}abh$, der h er høyden. For å se at V er et partall, holder det å vise at ab er delelig med 12. For å se at ab er delelig med 3, bruker vi at kvadratet av et heltall gir rest enten 0 eller 1 modulo 3. Anvender vi dette i likningen $a^2+b^2=c^2$, ser vi at minst en av a og b er delelig med 3. Det gjenstår å vise at ab er delelig med 4. Hvis både a og b er partall, er vi ferdige. På den annen side kan ikke både a og b være oddetall; dette følger fra likningen $a^2+b^2=c^2$ ved å bruke at kvadratet av et oddetall har rest 1 modulo 4, mens kvadratet av et partall har rest 0 modulo 4. Anta derfor at a er partall, og b og c oddetall. Vi har at $a^2 = c^2-b^2 = (c-b)(c+b)$. Fordi b og c er odde, er begge parantesene delelige på 2. Videre må minst en av parantesene være delelig med 4, for hvis både $c-b$ og $c+b$ har rest 2 modulo 4, får summen $(c-b)+(c+b) = 2c$ rest 0 modulo 4, noe som strider mot at c er odde. Vi har dermed vist at a^2 delelig med 8, og det følger at a (og derfor ab) er delelig med 4.

Oppgave 2

a) Vi tenker oss at akvariet er inndelt i åtte terningformede soner, alle med sidelengde 1. Fordi det er ni fisk, må det til enhver tid finnes en sone med (deler av) minst to fisk. Den maksimale avstanden mellom to punkter i en sone er lik lengden av en romdiagonal i en terning med sidelengde 1, nemlig $\sqrt{3}$. To fisk i samme sone har derfor avstand mindre enn $\sqrt{3}$, og oppgaven er løst.

b) Punktene i A kan deles inn i 8 grupper utifra pariteten til koordinatene: PPP, PPO, POP, POO, OPP, OPO, OOP og OOO, der P står for partall og O oddetall. (Punktet $(1,2,3)$ er for eksempel i gruppen OPO.) Siden vi har ni blå punkter, må det finnes en gruppe med minst to blå punkter. La (a,b,c) og (d,e,f) være to punkter i samme gruppe. Vi påstår at punktet M midtveis mellom disse punktene, ligger i A. Koordinatene til M er $(\frac{a+d}{2}, \frac{b+e}{2}, \frac{c+f}{2})$. Men siden a og d har samme paritet, er $\frac{a+d}{2}$ et heltall, og tilsvarende med $\frac{b+e}{2}$ og $\frac{c+f}{2}$. Punktet M har derfor heltallige koordinater, og påstanden er vist.

Oppgave 3

a) Trekk hjelpelinjen PB. Trekantene $\triangle PQC$, $\triangle PCB$ og $\triangle PBQ$ er alle likebeinte, og vi setter $u = \angle PQC = \angle PCQ$, $v = \angle PCB = \angle PBC$ og $w = \angle PBQ = \angle PQB$. Ved å se på vinkelsummen i $\triangle QCB$ får vi at $2u+2v+2w = 180°$. Dessuten har vi fra $\triangle BDA$ at $v+w = 90° - \frac{1}{2}\angle A$. Kombinerer vi disse to likningene, følger det at $u = \frac{1}{2}\angle A$, som var det vi skulle vise.

b) Vi ser først at fordi $\triangle CHG \sim \triangle CDA$, er $\triangle CHG$ likebeint, slik at $CH = GH = FD$. Videre er $\triangle BCD$ likesidet, slik at $BC = BD$. Dette viser at $\triangle BDF$ og $\triangle BCH$ er kongruente, fordi $\angle BDF = \angle BCH = 60°$. Det følger at $BF = BH$. Men $\angle FBD = \angle HBC$ gir at $\angle FBH = \angle DBC = 60°$, så $\triangle FBH$ er likesidet.

Oppgave 4

a) Ulikheten vi skal vise forblir uforandret dersom vi skalerer tallene a, b og c med en vilkårlig positiv faktor k (dette betyr at vi erstatter a, b, og c med ka, kb og kc). Ved å sette $k = \frac{1}{a}$, kan vi derfor anta at $a = 1$. Ganger vi ut og kvadrerer, får vi da $(1+b+c+bc)^2 \geq 4bc(1+b+c)$. Men ved å flytte alt over på venstresiden, og rydde opp, ser vi at dette er ekvivalent med den sanne ulikheten $(1+b+c-bc)^2 \geq 0$.

b) Observer først at den opplagte ulikheten $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$ gir at $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. Sammen med antakelsen i oppgaven medfører dette at $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca) > 3(a+b+c)$. Fordi $a+b+c > 0$, kan vi dele på $a+b+c$ og bevare ulikhetstegnet. Det følger at $a+b+c > 3$.