Abel-konkurransen 2004–2005

Fasit til første runde

Oppgave 1: $0,032/0,8 = 0,04$. **C**

Oppgave 2: Summen kan skrives som $1 + (5-3) + (9-7) + \ldots + (101-99)$ der det til sammen er 25 paranteser. Summen blir altså $1 + 50 = 51$. **B**

Oppgave 3: Finn må ha startet med tallet 12, og skulle dermed ha fått svaret 6. **A**

Oppgave 4: $1/x = (1/a) + (1/b) = (a+b)/ab$. Dermed blir $x = ab/(a+b)$. **D**

Oppgave 5: $4^{20} + 4^{20} = 2^{40} + 2^{40} = 2^{41}$. **B**

Oppgave 6: På kartet med målestokk $1 : 10000$ vil like lengder i terrenget være $2,5$ ganger lenger enn på kartet med målestokk $1 : 25000$. Forholdet mellom like arealer i terrenget vil dermed bli $(2,5)^2 = 6,25$. Arealet av innsjøen på kartet med størst målestokk blir dermed $200/6,25 = 32$ cm^2. **A**

Oppgave 7: Trekantene ABP og CDP har $AB = CD = 1$ som grunnlinjer. Summen av høydene er 1, og arealet blir dermed $1/2$. (Opplysningen om vinkelen på 75° er overflødig.) **A**

Oppgave 8: $4^8 \cdot 5^{17} = 2^{16} \cdot 5^{16} \cdot 5 = 5 \cdot 10^{16}$. Tallet er dermed 5 etterfulgt av 16 nuller, og antall sifre blir 17. **D**

Oppgave 9: Hvis lysene opprinnelig har lengde 1, så vil etter x timer lengdene være henholdsvis $1 - x/5$ og $1 - x/3$. Løser vi likningen $1 - x/5 = 3(1 - x/3)$, får vi $x = 2,5$. Det ene lyset er altså 3 ganger så høyt som det andre etter 150 minutter. **D**

Oppgave 10: Arealet av ABC er 9 ganger så stort som arealet av HGC (grunnlinje og høyde er begge tre ganger større i ABC). Trekantene ADH og BFD er begge dobbelt så store som CGH. Arealet inne i ABC, men utenfor firkanten, er dermed 5 ganger så stort som arealet til HGC, mens arealet inne i firkanten blir 4 ganger så stort. Forholdene mellom arealene blir dermed $4/9$. **E**

Oppgave 11: Summerer vi de fire tallene får vi 807. Siden hvert av de fire tallene er tatt med tre ganger i denne summen, så blir summen av de fire tallene $807/3 = 269$. Det største tallet blir dermed $269 - 180 = 89$. **C**

Oppgave 12: Etter å ha tatt kvadratroten, og fjernet nullene, så står vi igjen med tallet 2^{1000}, og vi skal finne det siste sifferet i dette tallet. Bruker vi at $16 = 2^4$, får vi at $2^{1000} = 16^{250}$. Men når vi ganger sammen tall som ender på 6, vil også produktet ende på 6, så sifferet vi søker er altså 6. **C**

Oppgave 13: Den store sirkelen har areal 9π, mens de små har areal π. Arealet inne i den store sirkelen, men utenfor de små har dermed areal 4π, og arealet av det skraverte området blir firedelen av dette, altså π. **B**

Oppgave 14: Han solgte til sammen 240 kuler is den dagen. Hvis han bare hadde solgt små iskremer, hadde han fått 6 kroner per kule og da solgt for $240 \cdot 6 = 1440$ kroner. Men for hver stor iskrem som ble solgt fikk han 2 kroner mindre i forhold til om han skulle ha solgt for 6 kroner per kule. Siden $1440 - 1376 = 64$, så solgte han altså $64/2 = 32$ store iskremer den dagen. **C**

Oppgave 15: La Q være midtpunktet på AB. Da er $BQ = 45$, $OB = 55$, og ved Pythagoras får vi at $OQ^2 = 1000$. Siden $PQ = 45 - 30 = 15$, får vi ved Pythagoras at $OP^2 = 1225$ og dermed er $OP = 35$ cm. **B**

Oppgave 16: Observer først at $a+b+2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$ og $a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ Kvadratrøttene av disse uttrykkene er henholdsvis $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ og $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$, der vi har brukt at $a \geq b$. Siden x var satt lik summen av disse to uttrykkene, blir $x = 2\sqrt{a}$. **D**

Oppgave 17: Det er 9 damer og 8 menn i selskapet. (For eksempel så er antall håndtrykk mellom 8 menn $8 \cdot 7/2 = 36$). Antall håndtrykk mellom en dame og en mann blir dermed $9 \cdot 8 = 72$. **B**

Oppgave 18: La $D = (0, 14)$ være speilingen av A i linja $x = y$, og la $E = (42, 0)$ være speilingen av i A i linja $x = 28$. Da vil $AB = DB$ og $AC = EC$. Omkretsen av ABC kan da skrives som $DB + BC + CE$. Denne summen blir minst når B og C ligger på linja gjennom D og E. Likningen for denne linja er $y = -x/3 + 14$, og denne skjærer $x = y$ når $x = 10,5$. **B**

Oppgave 19: Vi har at $(8n + 169)/(2n + 1) = 4 + (165/(2n + 1))$. Spørsmålet blir dermed: Hvor mange oddetall større enn 1 går opp i 165? Siden $165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$, finner vi de 7 faktorene: $3, 5, 11, 15, 33, 55, 165$. **E**

Oppgave 20: Antall muligheter til å velge tre riddere av de 25 er $m = \binom{25}{3} = 2300$. Av disse 2300 er det 25 muligheter der alle tre sitter ved siden av hverandre. Videre er det $25 \cdot 21 = 525$ muligheter der nøyaktig to sitter ved siden av hverandre (det er 25 måter å velge to naboer, og det vil da være 21 måter å velge tredjemann). Den søkte sannsynligheten blir dermed $550/2300 = 11/46$. **D**