Abel-konkurransen 2004 – 2005
Fasit til andre runde

Oppgave 1: Siden summen av de 20 tallene er $20 \cdot 20 = 400$, og summen av de 9 første er $9 \cdot 9 = 81$, er summen av de 11 siste lik $400 - 81 = 319$. Gjennomsnittet av disse blir dermed $319/11 = 29$. **29**

Oppgave 2: Du må ta minst 13 sokker. For å se at dette holder, observer først at i en samling på minst 5 sokker er det garantert minst ett par. Tar du 13, har du altså minst ett par. Legg disse til side. Blant de 11 resterende må det også finnes et par, som du legger til side. Slik kan du fortsette til du har funnet 5 par (og står igjen med 3 sokker). Med 12 sokker kunne du risikere å bare få 4 par, for eksempel med en svart, en grønn, en hvit og ni brune sokker. **13**

Oppgave 3: La ℓ være diameteren som går gjennom P. Denne har lengde 26, og er den lengste av alle kordene gjennom P. Den korteste er den som står vinkelrett på ℓ, og har lengde 10 (dette følger fra Pythagoras). Dersom vi varierer en korde mellom disse to ekstremene, oppnår vi alle mulige lengder mellom 10 og 26, spesielt alle heltallslengder. Alle lengder unntatt 10 og 26 oppnås nøyaktig to ganger, fordi dersom K er en korde gjennom P, vil speilingen av K om ℓ også være en korde gjennom P, med samme lengde som K. Antall korder med heltallig lengde blir dermed $2 + 2 \cdot 15 = 32$. **32**

Oppgave 4: Anta at sidelengdene til kassa er x, y og z, ordnet slik at $xy = 84$, $xz = 70$ og $yz = 30$. Multipliserer vi disse likningene, får vi at $(xyz)^2 = 84 \cdot 70 \cdot 30 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2$, og det følger at volumet av kassa er $xyz = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$. **420**

Oppgave 5: Stokker vi om på likningen, får vi $(x+y)^2 - 498(x+y) - 1000 = 0$. Dette er en annengradslikning i $x + y$, med løsninger $x + y = -2$ og $x + y = 500$. Siden x og y begge er positive, må vi ha $x + y = 500$. Denne likningen har de 499 løsningene $(x, y) = (n, 500 - n)$, der $n = 1, 2, \ldots, 499$. Den opprinnelige likningen har derfor 499 løsninger. **499**

Oppgave 6: La E, F, G og H være punktene der sirkelen tangerer henholdsvis AB, BC, CD og DA. Da er $AE = AH$, $BE = BF$, $CF = CG$ og $DG = DH$. Det følger av dette at $AB + CD = BC + AD$. Dermed blir $AD = 119 + 64 - 95 = 88$. **88**

Oppgave 7: Hvis vi ser bort fra restriksjonen om minst en på hver arbeidsoppgave, er det $2^9 = 512$ måter å dele inn klassen (for hver av de 9 elevene er det 2 muligheter). Av disse 512 er det to vi ikke kan bruke, nemlig den der alle raker løv og den der alle vasker. Dermed står vi igjen med 510 måter. **510**

Oppgave 8: Anta $\angle B = 6,5°$, og la H være fotpunktet for høyden fra C ned på AB. Den søkte vinkelen er da $\angle HCO$. Observer at $\triangle BOC$ er likebeint (fordi O er sentrum i den omskrevne sirkelen til $\triangle ABC$), slik at $\angle BOC = 180° - 2 \cdot 6,5° = 167°$. Dermed er $\angle HOC = 180° - 167° = 13°$, og det følger at $\angle HCO = 90° - 13° = 77°$. **77**

Oppgave 9: Hvis $x^2 - 5x - 1$ er en faktor i $ax^3 - bx^2 + 1$, må det finnes reelle tall s og t slik at $ax^3 - bx^2 + 1 = (x^2 - 5x - 1)(sx + t)$. Ganger vi ut og rydder opp, får vi at $ax^3 - bx^2 + 1 = sx^3 + (t - 5s)x^2 + (-s - 5t)x - t$. Dette gir likningene $a = s$, $-b = t - 5s$, $0 = -s - 5t$, $1 = -t$. Det følger at $t = -1$, $s = a = 5$, og $b = 5s - t = 26$. Det søkte tallet er dermed $26^2 = 676$. **676**

Oppgave 10: Ved å sette inn henholdsvis $x = 2$ og $x = -1$, får vi likningene $f(2)+2f(-1) = 240$ og $f(-1) - f(2) = -120$. Legger vi likningene sammen, ender vi opp med at $3f(-1) = 120$, altså $f(-1) = 40$. Setter vi dette inn i den første likningen igjen, får vi $f(2) = 240 - 2 \cdot 40 = 160$. **160**

FASIT

1:	29	6:	88
2:	13	7:	510
3:	32	8:	77
4:	420	9:	676
5:	499	10:	160