Bokmål

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2005–2006

Finale 9. mars 2006

Abelkonkurransens finale består av 4 oppgaver (8 punkter) som skal løses i løpet av 4 timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. Begynn på nytt ark for hver oppgave.

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Det gir en poengsum mellom 0 og 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir og skriveredskaper er tillatt.

Oppgave 1

Hver rute i en $n \times n$-tabell er malt svart eller hvit. De fire rutene der to rader møter to kolonner, kalles en *kvartett* hvis de fire rutene har samme farge.

(a) Hva er det største mulige antallet svarte ruter i en 4×4-tabell uten kvartetter?

(b) Går det an å male en 5×5-tabell slik at den ikke har noen kvartetter?

Oppgave 2

(a) La a og b være to ikke-negative reelle tall. Vis at $a + b \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}$.

(b) La a og b være to reelle tall i $[0, 3]$. Vis at $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab} \geq \frac{(a+b)^2}{6}$.

Oppgave 3

(a) La a og b være rasjonale tall som er slik at linja $y = ax+b$ skjærer sirkelen $x^2 + y^2 = 5$ i to forskjellige punkter. Vis at hvis ett av skjæringspunktene har to rasjonale koordinater, så har også det andre skjæringspunktet det.

(b) Vis at det fins uendelig mange tripler (k, n, m) som er slik at $k^2 + n^2 = 5m^2$, der k, n og m er heltall, og ikke alle tre har noen felles primfaktor.

Oppgave 4

La γ være den omskrevne sirkelen om en rettvinklet trekant ABC med rett vinkel C. La δ være sirkelen som tangerer sidene AC og BC, og som tangerer sirkelen γ innvendig.

(a) Finn radien i δ uttrykt ved a når AC og BC begge har lengde a.

(b) Vis at radien i δ er dobbelt så stor som radien i den innskrevne sirkelen i ABC.