Nynorsk

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2005–2006

Finale 9. mars 2006

I finalen i Abelkonkurransen er det 4 oppgåver (8 punkt) som skal løysast på 4 timar. Svara skal grunngjevast og førast på eigne ark. Begynn på nytt ark for kvar oppgåve.

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Det gjev ein poengsum mellom 0 og 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir og skrivereiskapar er tillatne.

Oppgåve 1

Kvar rute i ein $n \times n$-tabell er måla svart eller kvit. Dei fire rutene der to rader møter to kolonnar, blir kalla ein *kvartett* dersom dei fire rutene har same fargen.

(a) Kva er det største moglege talet på svarte ruter i ein 4×4-tabell utan kvartettar?

(b) Går det an å måle ein 5×5-tabell slik at han ikkje har nokon kvartettar?

Oppgåve 2

(a) La a og b vere to ikkje-negative reelle tal. Vis at $a + b \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}$.

(b) La a og b vere to reelle tal i $[0, 3]$. Vis at $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab} \geq \frac{(a+b)^2}{6}$.

Oppgåve 3

(a) La a og b vere rasjonale tal som er slik at linja $y = ax + b$ skjer sirkelen $x^2 + y^2 = 5$ i to ulike punkt. Vis at dersom eitt av skjeringspunkta har to rasjonale koordinatar, så har også det andre skjeringspunktet det.

(b) Vis at det finst uendeleg mange trippel (k, n, m) som er slik at $k^2 + n^2 = 5m^2$, der k, n og m er heiltal, og ikkje alle tre har nokon felles primfaktor.

Oppgåve 4

La γ vere den omskrivne sirkelen om ein rettvinkla trekant ABC med rett vinkel C. La δ vere sirkelen som tangerer sidene AC og BC, og som tangerer sirkelen γ innvendig.

(a) Finn radien i δ uttrykt ved a når AC og BC begge har lengd a.

(b) Vis at radien i δ er dobbelt så stor som radien i den innskrivne sirkelen i ABC.