Bokmål

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2006–2007

Finale 8. mars 2007

Abelkonkurransens finale består av 4 oppgaver (8 punkter) som skal løses i løpet av 4 timer. Svarene skal begrunnes og føres på egne ark. Begynn på nytt ark for hver oppgave.

Du får opptil 10 poeng på hver oppgave. Det gir en poengsum mellom 0 og 40.

Ingen andre hjelpemidler enn kladdepapir, skriveredskaper og tospråklige ordbøker er tillatt.

Oppgave 1

Tverrsummen av et positivt heltall er summen av sifrene i tallet (for eksempel er tverrsummen av 2007 lik 9, da $2+0+0+7=9$).

(a) Hvor mange heltall n, der $0 < n < 100\,000$, har tverrsum som er et partall?

(b) Hvor mange heltall n, der $0 < n < 100\,000$, har tverrsum som er mindre enn eller lik 22?

Oppgave 2

Hjørnene i en konveks femkant $ABCDE$ ligger på en sirkel γ_1. Diagonalene AC, CE, EB, BD og DA tangerer en annen sirkel γ_2 med samme sentrum som γ_1.

(a) Vis at alle vinklene er like store og alle kantene like lange i femkanten $ABCDE$.

(b) Hva er forholdet mellom radiene til sirklene γ_1 og γ_2? (Bare hele tall, de fire regneartene og rotutdraging skal inngå i svaret.)

Oppgave 3

(a) La x og y være to positive heltall som er slik at $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ er et helt tall. Vis at $\sqrt{x}$ og $\sqrt{y}$ begge er hele tall.

(b) Finn alle positive heltall x og y som er slik at $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{2007}$.

Oppgave 4

La a, b og c være hele tall som er slik at $a+b+c=0$.

(a) Vis at $a^4+b^4+c^4$ er delelig med $a^2+b^2+c^2$.

(b) Vis at $a^{100}+b^{100}+c^{100}$ er delelig med $a^2+b^2+c^2$.