Nynorsk

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2006–2007

Finale 8. mars 2007

I finalen i Abelkonkurransen er det 4 oppgåver (8 punkt) som skal løysast på 4 timar. Svara skal grunngjevast og førast på eigne ark. Begynn på nytt ark for kvar oppgåve.

Du får opptil 10 poeng på kvar oppgåve. Det gir ein poengsum mellom 0 og 40.

Ingen andre hjelpemiddel enn kladdepapir, skrivereiskapar og tospråklege ordbøker er tillatne.

Oppgåve 1

Tverrsummen av eit positivt heiltal er summen av sifra i talet (til dømes er tverrsummen av 2007 lik 9, ettersom $2 + 0 + 0 + 7 = 9$).

(a) Kor mange heiltal n, der $0 < n < 100\,000$, har tverrsum som er eit partal?

(b) Kor mange heiltall n, der $0 < n < 100\,000$, har tverrsum som er mindre enn eller lik 22?

Oppgåve 2

Hjørna i ein konveks femkant $ABCDE$ ligg på ein sirkel γ_1. Diagonalane AC, CE, EB, BD og DA tangerer ein annan sirkel γ_2 med same sentrum som γ_1.

(a) Vis at alle vinklane er like store og alle kantane like lange i femkanten $ABCDE$.

(b) Kva er forholdet mellom radiane til sirklane γ_1 og γ_2? (Berre heile tal, dei fire rekneartane og rotutdraging skal inngå i svaret.)

Oppgåve 3

(a) La x og y vere to positive heiltal som er slik at $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ er eit heilt tal. Vis at $\sqrt{x}$ og $\sqrt{y}$ begge er heile tal.

(b) Finn alle positive heiltal x og y som er slik at $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2007}$.

Oppgåve 4

La a, b og c vere heile tal som er slik at $a + b + c = 0$.

(a) Vis at $a^4 + b^4 + c^4$ er deleleg med $a^2 + b^2 + c^2$.

(b) Vis at $a^{100} + b^{100} + c^{100}$ er deleleg med $a^2 + b^2 + c^2$.