Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2006–2007. *Løsninger*

Finale 8. mars 2007

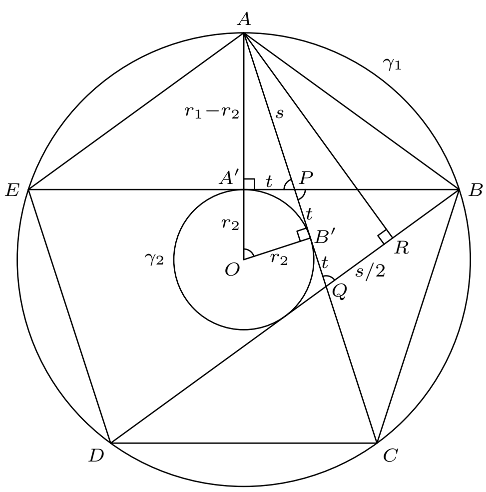
Oppgave 1

(a) Vi deler inn de 100 000 heltallene fra og med 0 til og med 99 999 i 50 000 par, der hvert par består av et partall og det etterfølgende oddetallet (for eksempel utgjør 25 330 og 25 331 et par). Det ene tallet i hvert par har jamn tverrsum og det andre odde. Altså har halvparten av heltallene fra og med 0 til og med 99 999 jamn tverrsum, slik at 49 999 av heltallene fra og med 1 til og med 99 999 har jamn tverrsum (0, som vi skulle se bort fra, har jamn tverrsum).

(b) Denne gangen deler vi inn de 100 000 heltallene fra og med 0 til og med 99 999 i 50 000 par, der hvert par består av to tall som har sum 99 999 (for eksempel består ett av parene av 53 283 og 46 716). Summen av tverrsummene av de to tallene i et par er 45, slik at det ene tallet har tverrsum mindre enn eller lik 22 og det andre større enn 22. Altså har halvparten av tallene tverrsum mindre enn eller lik 22. Igjen skulle vi se bort fra 0, så vi står igjen med 49 999 av tallene.

Oppgave 2

(a) Lengden av hver diagonal, som er en korde i γ_1, er bestemt av de to sirklene, og er uavhengig av diagonalens plassering. Også vinkelen mellom de to diagonalene som går fra hvert hjørne er bestemt av de to sirklene, og er uavhengig av hjørnets plassering. Alle diagonalene er derfor like lange, og vinklene mellom de to diagonalene som går fra hvert hjørne er like store.



De fem trekantene som består av to diagonaler og én kant (for eksempel BDE), er derfor likebeinte og kongruente, så femkanten er likesidet. Dermed er også de fem trekantene som består av to sider og én diagonal (for eksempel ABC) likebeinte og kongruente, og vinklene i femkanten er like store.

(b) La O være sentrum i de to sirklene. La A' og B' være skjæringspunktene mellom γ_2 og henholdsvis OA og

OB. Da er A' og B' tangeringspunkter mellom γ_2 og henholdsvis diagonalene BE og AC, fordi femkanten er regulær. Vinklene $AA'B$ og $AB'O$ er rette.

La P være skjæringspunktet mellom diagonalene AC og BE, og la Q være skjæringspunktet mellom diagonalene AC og BD. Vinklene APA' og QPB er toppvinkler og dermed like store, og fordi trekanten PBQ er likebeint, er også vinkelen AQB like stor som APA'.

La R være fotpunktet for høyden fra A til QB. Da er de tre trekantene $AA'P$, $AB'O$ og ARQ rettvinklete og formlike.

La r_1 være radius i γ_1, la r_2 være radius i γ_2, la s være lengden av AP og av QB, og la t være lengden av $A'P$, PB' og $B'Q$. Fra de tre formlike trekantene får vi da $s/t = r_1/r_2 = (s+2t)/(s/2)$. La $x = r_1/r_2 = s/t$. Vi har da $x = 2(s/t+2)/(s/t) = 2(x+2)/x$, som har positiv løsning $1+\sqrt{5}$.

Oppgave 3

(a) Anta at $\sqrt{x}+\sqrt{y} = n$, der n er et helt tall. Kvadrering av $\sqrt{x} = n - \sqrt{y}$ gir $x = n^2 - 2n\sqrt{y} + y$, slik at $\sqrt{y} = (n^2+y-x)/(2n)$, og $\sqrt{y}$ er altså et rasjonalt tall.

La p og q være positive heltall uten felles faktorer som er slik at $\sqrt{y} = p/q$. Da er $y = p^2/q^2$. Heller ikke p^2 og q^2 har felles faktorer, og da y er helt, må q være lik 1. Så $\sqrt{y} = p$ og altså et helt tall. Det følger nå fra den første likningen at også $\sqrt{x}$ er helt.

(b) Multipliser likningen med $\sqrt{2007}$. Vi får da $\sqrt{2007x} + \sqrt{2007y} = 2007$, som fordi $2007 = 3^2 \cdot 223$, gir $\sqrt{223x} + \sqrt{223y} = 3 \cdot 223$. I følge (a) er $223x$ og $223y$ kvadrattall, og 223 er et primtall, slik at $x = 223s^2$ og $y = 223t^2$ for to positive heltall s og t. Dette innsatt i likningen gir $223s + 223t = 3 \cdot 223$, altså $s+t = 3$. Så de eneste mulighetene er $(s,t) = (1,2)$ eller $(s,t) = (2,1)$, som henholdsvis gir $(x,y) = (223, 892)$ eller $(x,y) = (892, 223)$.

Oppgave 4

Det er lett å verifisere at

$$\begin{aligned} a^n + b^n + c^n &= (a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1})(a+b+c) \\ &\quad - (a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2})(ab+ac+bc) + abc(a^{n-3}+b^{n-3}+c^{n-3}) \end{aligned}$$

for alle a, b og c og alle heltall $n \geq 3$. Her er det første leddet på høyre side lik 0, slik at

$$\begin{aligned} &a^n + b^n + c^n \\ &\quad = -(a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2})(ab+ac+bc) + abc(a^{n-3}+b^{n-3}+c^{n-3}) \end{aligned}$$

(a) Sett $n = 4$. Da er også siste ledd på høyre side lik 0, så $a^4 + b^4 + c^4 = -(a^2 + b^2 + c^2)(ab + ac + bc)$, og $a^4 + b^4 + c^4$ er delelig med $a^2 + b^2 + c^2$.

(b) Fordi $0 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$, gir likningen ovenfor

$$\begin{aligned} &a^n + b^n + c^n \\ &\qquad = \frac{1}{2}(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2})(a^2 + b^2 + c^2) + abc(a^{n-3} + b^{n-3} + c^{n-3}). \end{aligned}$$

Merk også at $a + b + c = 0$ betyr at a, b og c enten alle er partall, eller at ett av tallene er partall og to oddetall, slik at $a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}$ er et partall. For alle heltall $n \geq 3$ fins altså heltall s og t slik at

$$a^n + b^n + c^n = s(a^2 + b^2 + c^2) + t(a^{n-3} + b^{n-3} + c^{n-3}).$$

Vi ser da at hvis $a^{n-3} + b^{n-3} + c^{n-3}$ er delelig med $a^2 + b^2 + c^2$, så er også $a^n + b^n + c^n$ det. Altså er $a^n + b^n + c^n$ delelig med $a^2 + b^2 + c^2$ for $n = 4$, 7, 10, …, 97, 100, …