Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2006–2007. *Løsninger*

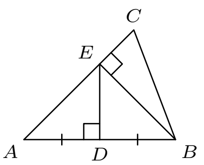
Første runde 2. november 2006

Oppgave 1. Alle tallene er delelige med 5. Det eneste av tallene som ikke er delelig med 3, er 230. .... **B**

Oppgave 2. Lengden av periferien er π^2 og lengden av diameteren 2π. Til sammen $\pi^2 + 2\pi$. .... **E**

Oppgave 3. De 8 bøkene på 3 kg må sendes i hver sin eske. Ingen av de 3 bøkene på 2 kg kan legges i noen av de nevnte 8 eskene, og 2 esker må til for å sende disse, slik at 10 esker trengs. Det er plass til de 2 bøkene på 1 kg for eksempel i eska med 1 bok på 2 kg. .... **C**

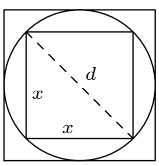
Oppgave 4. Likningene gir $a = \frac{2}{5}b$ og $c = \frac{2}{5}d$, der b og d er positive tall, slik at $b + d \neq 0$. Så $\frac{a+c}{b+d} = \frac{\frac{2}{5}b+\frac{2}{5}d}{b+d} = \frac{\frac{2}{5}(b+d)}{b+d} = \frac{2}{5}$. .... **C**



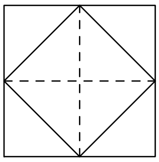
Oppgave 5. De to trekantene ADE og BDE er kongruente, da begge er rettvinklete og katetene har parvis samme lengde. Vinklene BAE og ABE er like store og AEB rett. Summen av dem er 180°, og vinkelen BAE er 45°. .... **B**

Oppgave 6. Første gutt kan plukkes ut på 8 måter. For hver av disse mulighetene kan andre gutt plukkes ut på 7 måter. Da vi ikke skiller mellom et utvalg av to gutter og et utvalg av de to samme der den første og den andre utplukkete er byttet om, er antall utvalg av 2 gutter $8 \cdot 7/2 = 28$. For hver av disse 28 mulighetene, har vi på samme måte $5 \cdot 4/2 = 10$ mulige utvalg av to jenter – til sammen $28 \cdot 10 = 280$ mulige lag. .... **C**

Oppgave 7. $1/x = x+2$ gir $1/x^2 = 1+2/x = 1+2\cdot 1/x = 1+2(x+2) = 2x+5$. .... **B**



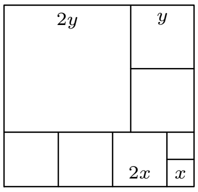
Oppgave 8. Hvis sirkelen har diameter d, så har det største kvadratet sidelengde d og det minste sidelengde x bestemt ved at $2x^2 = d^2$ (Pytagoras' setning). Forholdet mellom arealene er $d^2/x^2 = 2d^2/2x^2 = 2d^2/d^2 = 2$.



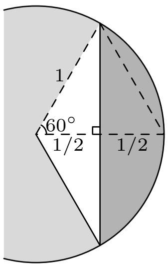
Alternativ: Drei det minste kvadratet $45°$ om sentrum, og se på arealet av de åtte trekantene på figuren. . . . . **C**

Oppgave 9. Trekker vi den første likningen fra den andre, får vi $b + 2c = 12$. Dette er mulig med positive heltallige b og c når c er lik 1, 2, 3, 4 eller 5. Også a blir positiv og heltallig i disse tilfellene. . . . . **B**

Oppgave 10. La s være lengden av rullefortauet, v Olas fart og v_0 rullefortauets fart (målt i sekunder pr. lengdeenhet). Da er $s = 6(v + v_0)$ og $s = 24(v - v_0)$. Fire ganger første likning minus andre likning gir $3s = 48v_0$, slik at Ola når han står stille bruker $s/v_0 = 48/3 = 16$ sekunder. . . . . **C**

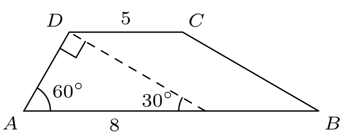


Oppgave 11. La kvadratsidene ha lengder x, $2x$, y og $2y$, som vist på figuren. Ved å sammenlikne nedre og øvre vannrette side i rektanglet, får vi $7x = 3y$, mens de loddrette sidene har lengde $2x + 2y$. Forholdet mellom vannrette og loddrette sider er $7x/(2x + 2y) = 7x/(2x + 2 \cdot 7x/3) = 21/20$. . . . . . **A**



Oppgave 12. Vi skal finne arealet av det mørkeste området på figuren ved å trekke arealet av det hvite området fra arealet av sirkelsektoren som består av det hvite og det mørkeste området. Den markerte vinkelen er $60°$, fordi den øvre hvite rettvinklete trekanten har en katet som er halvparten av hypotenusen. Dette er velkjent, men kan ses ved å sette sammen trekanten med dens speiling langs den andre kateten, slik at en likesidet trekant framkommer (stiplet). Arealet av sirkelsektoren er $120\pi/360 = \pi/3$, mens arealet av den hvite trekanten er $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1 - (\frac{1}{2})^2} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}/4$. . . . . **C**

Oppgave 13. Det er 20 kvadrater av med sidelengde 1, 12 kvadrater med sidelengde 2, 6 kvadrater med sidelengde 3 og 2 kvadrater med sidelengde 4. . . . . **C**

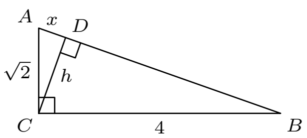


Oppgave 14. Parallellforskyv BC slik at C kommer på D. Da dannes en trekant med vinklene $30°$, $60°$ og $90°$ og med hypotenus av lengde $13 - 5 = 8$. Den korteste kateten, AD, har halvparten av lengden av hypotenusen, ved et liknende resonnement som i oppgave 12 (sett sammen trekanten med sin speiling langs den andre kateten, slik at en likesidet trekant framkommer). . . . . **E**

Oppgave 15. Hvis vi har en rød, en blå og en grønn terning, er det 6 muligheter for den røde, 6 muligheter for hver av disse for den blå, til sammen 36 muligheter, og for hver av disse 6 muligheter for den grønne, til sammen $36 \cdot 6 = 216$ like sannsynlige muligheter. Terningene kan gi 12 på 6 måter med verdiene $1+5+6$, på 6 måter med $2+4+6$, på 3 måter med $2+5+5$, på 3 måter med $3+3+6$, på 6 måter med $3+4+5$ og på 1 måte med $4+4+4$ – til sammen 25 måter. . . . . **D**

Oppgave 16. Siste siffer i produktet av to tall er lik siste siffer i produktet av siste siffer i de to tallene. Siste siffer i 2007^n vil følge mønsteret 1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, ... når vi starter med $n = 0$ og lar n vokse med én om gangen (et tall i denne følgen er siste siffer i produktet av 7 og foregående tall). Når n er delelig med 4, er 1 siste siffer i 2007^n. Her er eksponenten $n = 2006^{2005}$, som er delelig med 4, da 2006 er delelig med 2 og dermed 2006^k delelig med 4 for alle $k \geq 2$. . . . . **A**

Oppgave 17. La b være Berits alder da Anna var $4b$ år. Annas alder er nå $5b$ år, og Berit er også blitt b år eldre, slik at hun er $2b$ år. Om 6 år er Anna $5b+6$ år og Berit $2b+6$ år, og $5b+6 = 2(2b+6)$ gir $b = 6$, og $5b+2b = 42$. . . . . **D**



Oppgave 18. Lengden av AC er $\sqrt{2}$, da BC har lengde 4 og trekanten ABC har areal $2\sqrt{2}$. La AD ha lengde x og CD lengde h. Trekantene ABC og ACD er formlike, slik at $x/h = \sqrt{2}/4$, og dermed er $h^2 = 8x^2$. Etter Pytagoras' setning er $2 = x^2 + h^2 = 9x^2$, slik at $x = \sqrt{2}/3$. **C**

Oppgave 19. La de fire tallene være a, b, c og d. Da er $178 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = (a+b)^2 + (a+c)^2 + (a+d)^2 + (b+c)^2 + (b+d)^2 + (c+d)^2 = 3(a^2+b^2+c^2+d^2) + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) = 2(a^2+b^2+c^2+d^2) + (a+b+c+d)^2 = 2(a^2+b^2+c^2+d^2) + 100$. Den siste likheten følger av at vi i summen $2+3+4+6+7+8 = 30$ teller hvert av de fire tallene 3 ganger, slik at $a+b+c+d = 30/3 = 10$. (Eventuelt kan vi innse at $a+b+c+d$ er summen av de to minste og de to største tallene, altså $2+8 = 10$.) Dermed er $a^2+b^2+c^2+d^2 = (178-100)/2 = 39$.

Alternativ: La de fire tallene være a, b, c og d, der $a \leq b \leq c \leq d$. Da er $a+b = 2$ og $a+c = 3$, og $b+c = 4$ (da er $a+d = 6$) eller $b+c = 6$ (da er $a+d = 4$). Summen av de to første likningene er $2a+b+c = 5$, og kombinert med hver av alternativene for $b+c$, gir dette $2a+4 = 5$ eller $2a+6 = 5$, slik at $a = 1/2$ eller $a = -1/2$. Dette gir henholdsvis $b = 3/2$ og $c = 5/2$, eller $b = 5/2$ og $c = 7/2$. På samme måte er $c + d = 8$ og $b + d = 7$, som gir $2d + b + c = 15$. I tilfellet $b + c = 4$ gir dette $d = 11/2$, og i tilfellet $b + c = 6$ gir dette $d = 9/2$. I begge tilfellene er $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 39$. .... **D**

Oppgave 20. La de ukjente sifrene være a, b, c og d i rekkefølge fra venstre til høyre. Fordi $92 \cdot 39 < 92 \cdot 40 = 3680 < 3906$, er $c \leq 2$. Fordi produktet slutter på 6, er 6 siste siffer i $2b$, så $b = 3$ eller $b = 8$. La $A = 10a + 2$ være første tall på venstre side. Vi tar først for oss tilfellet $c = 1$. Da er $50 = 1900/38 < 1906/38 \leq A \leq 1996/33 < 2013/33 = 61$, slik at $A = 52$. $52 \cdot 33 = 1716$ passer ikke med høyre side, mens $52 \cdot 38 = 1976$ er en løsning. Vi tar så for oss $c = 2$. Da er $75 = 2850/38 < 2906/38 \leq A \leq 2996/33 < 3003/33 = 91$, slik at $A = 82$. Men verken $82 \cdot 33 = 2706$ eller $82 \cdot 38 = 3116$ passer med høyre side. Så regnestykket var $52 \cdot 38 = 1976$. .... **E**

Fasit

1		B	11		A
2		E	12		C
3		C	13		C
4		C	14		E
5		B	15		D
6		C	16		A
7		B	17		D
8		C	18		C
9		B	19		D
10		C	20		E

Hvis denne siden kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.