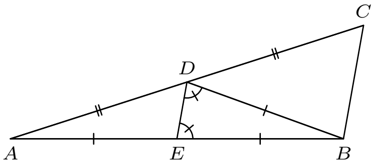
Niels Henrik Abels matematikkonkurranse 2006–2007. *Løsninger*

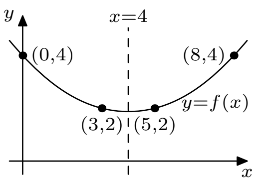
Andre runde   18. januar 2007

Oppgave 1. Fordi 3, 5, 7 og 8 ikke har noen felles primfaktorer, må tallet minst være $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840$. På den andre siden er dette tallet delelig også med 1, 2, 4 og 6. . . . . **840**

Oppgave 2. Hvis vi multipliserer likningene med henholdsvis x, y og z, får vi $x^2 + 2xy = 100$, $y^2 + 2yz = 96$ og $z^2 + 2xz = 93$. Adderer vi disse likningene, får vi $289 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = (x + y + z)^2$, og $x + y + z = \sqrt{289} = 17$. **17**



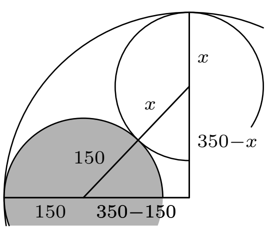
Oppgave 3. La E være et punkt på AB slik at DE er parallell med BC. Da er trekantene AED og ABC formlike, og vinkelen AED er $100°$. Fordi AC er dobbelt så lang som AD, er AB dobbelt så lang som AE, som dermed har samme lengde som BE og BD. Så trekanten DBE er likebeint med vinklene D og E lik $180° - 100° = 80°$, og vinkelen ABD er $180° - 2 \cdot 80° = 20°$. **20**



Oppgave 4. Fordi f er en andregradsfunksjon, er grafen til $y = f(x)$ symmetrisk om ei loddrett linje og voksende på den ene sida av linja og minkende på den andre. Da $f(3) = 2 = f(5)$, er symmetrilinja $x = (3+5)/2 = 4$. Så $f(0) = f(8) = 4$. **4**

1	7	25	63
1	5	13	25
1	3	5	7
1	1	1	1

Oppgave 5. Hvis det er a måter å komme til rute $(i-1, j)$ på, b måter å komme til rute $(i, j-1)$ på og c måter å komme til rute $(i-1, j-1)$ på, så er det $a+b+c$ måter å komme til rute (i, j) på. Til ruter langs nedre og venstre kant er det bare én måte å flytte brikken på. Antall måter vi kan flytte brikken til hver rute er bestemt av disse reglene, som vist i figuren. **63**

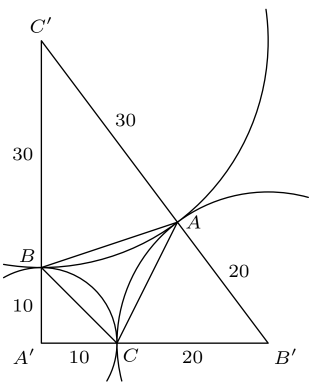


Oppgave 6. La x være radius i de små hvite sirklene. Sentrum i den store sirkelen, i en av de grå og en av de små hvite sirklene danner en rettvinklet trekant med kateter med lengde $350 - 150$ og $350 - x$ og hypotenus med lengde $150 + x$. Pytagoras' setning gir $40\,000 = (350 - 150)^2 = (x + 150)^2 - (350 - x)^2 =$

$(x+150+350-x)(x+150-350+x) = 500(2x-200)$, altså $2x-200 = 80$, og $x = 140$. **140**

Oppgave 7. Vi har $20 = x_8 = 4x_2 + 2x_4 - 8 = 4x_2 + 2(2x_2 + 2x_2 - 4) - 8 = 12x_2 - 16$, som gir $x_2 = 3$, og da er $x_4 = 2x_2 + 2x_2 - 4 = 8$. Videre er $36 = x_{12} = 4x_3 + 3x_4 - 12 = 4x_3 + 24 - 12 = 4x_3 + 12$, som gir $x_3 = 6$. Da er $x_{30} = 10x_3 + 3x_{10} - 30 = 60 + 45 - 30 = 75$. **75**

Oppgave 8. La det være x gutter og y jenter i klassen. Antall vennskap mellom gutt og jente er da $2x = 3y$, så x er delelig med 3. Antall vennskap mellom to gutter er $3x/2$ (teller vi tre vennskap mellom gutter for hver gutt, har vi telt alle slike vennskap to ganger). Så x er også delelig med 2, og dermed med 6. Vi har nå mulighetene $(x, y) = (6, 4)$ eller $(x, y) = (12, 8)$ ($x \geq 18$ gir $y \geq 12$, altså minst 30 elever). Men $y \geq 6$, fordi hver jente er venn med 5 andre jenter. Så $(x, y) = (12, 8)$, og $x + y = 20$. **20**



Oppgave 9. La A', B' og C' være sentrum i de tre sirklene (se figur). Tangeringspunktet mellom to sirkler ligger på linja gjennom sentrene i de to sirklene (radien ut til tangeringspunktet er vinkelrett på tangenten, som er den samme for de to sirklene). Vinkelen A' er rett, da sidene i trekanten $A'B'C'$ har lengde 30, 40 og 50, og $30^2 + 40^2 = 50^2$. Vi finner arealet av trekanten ABC ved å trekke arealene av trekantene $A'BC$, $AB'C$ og ABC' fra arealet av trekanten $A'B'C'$, og vi får $\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \sin B' - \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 \sin C' = 600 - 50 - 200 \cdot \frac{40}{50} - 450 \cdot \frac{30}{50} = 120$. **120**

Oppgave 10. La x være antall gullmynter. Da er $x+1$ delelig både med 30 og 31, og fordi 30 og 31 ikke har noen felles faktor, er $x+1$ delelig med $30 \cdot 31 = 930$. La $k = (x+1)/930$. Da er $x = 930k - 1 = 29 \cdot 32k + 2k - 1$, og da x er delelig med 29, er $2k-1$ delelig med 29. Minste mulige k er $k = 15$, som gir $x = 29(32 \cdot 15 + 1) = 29 \cdot 481 < 20\,000$, og 481 gullmynter på hver. Neste mulighet er $k = 44$, men $k \geq 44$ gir $x \geq 29(32 \cdot 44 + 3) > 20\,000$. **481**

Fasit

1		840	6		140
2		17	7		75
3		20	8		20
4		4	9		120
5		63	10		481

Hvis denne siden kopieres over på en transparent, så fungerer tabellen til venstre som en rettemal.